SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE ED ARTI
IN NAPOLI

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XXIV. — (Anno XCVI)

gennaio - dicembre 1957

NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO GUGLIELMO GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 22-568
1957

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE ED ARTI
IN NAPOLI

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XXIV. — (Anno XCVI)

gennaio - dicembre 1957

NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO GUGLIELMO GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 22-568
1957

RELAZIONE

SUI LAVORI COMPIUTI

DALL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

DURANTE L' ANNO 1956

letta nell' adunanza plenaria del dì 27 gennaio 1957

dal socio segretario **Geremia D' Erasmo**

Benchè il numero complessivo dei lavori presentati all' Accademia delle Scienze fisiche e matematiche, e da questa accolti per la stampa nel proprio Rendiconto, sia stato nel 1956 sensibilmente inferiore a quello degli anni precedenti, abbiamo potuto inserire nel nostro periodico parecchi contributi scientifici, sia di attivi consoci che riservano a questo Sodalizio i più interessanti risultati delle loro personali ricerche, sia di loro discepoli e collaboratori, che continuano le buone tradizioni della scuola e degli Istituti universitari napoletani, favorendo il progresso delle nostre discipline.

La pubblicazione del nuovo volume del Rendiconto (il XXIII della 4ª serie), avvenuta con la consueta regolarità, si è avvantaggiata, come negli anni precedenti, della concessione di uno speciale assegno finanziario, sui fondi che l' Ente Nazionale per la Cellulosa e la Carta destina alle riviste di elevato valore culturale.

Riassumendo assai brevemente, com' è mia abitudine, in questo scheletrico cenno annuale, la documentazione di tale attività accademica, comincio col rilevare che i più numerosi e cospicui contributi di scienze matematiche sono dovuti alla non rallentata collaborazione del consocio Spampinato, al quale toccò altresì l' onore di presiedere, nel decorso anno 1956, i lavori della nostra Accademia. A lui spettano infatti cinque distinti lavori, alcuni dei quali rappresentano la continuazione di particolari argomenti trattati in precedenti note, ugualmente inserite nel Rendiconto. Uno di essi tratta del *Carattere singolare e cuspidale di una curva storta completa,* ricollegandosi con la rappresentanzione dell' S_3 biduale con una congruenza di rette H_6 dell' S_7, che qui viene introdotta sinteticamente per rendere il lavoro indipendente dalla teoria dell' algebra dei numeri biduali. Un altro studia la *Rappresentazione nell'* S_{2r+1} *complesso di una serie lineare, secata su una curva dell'* S_r *complesso da un fascio di ipersuperficie prolungata nel campo biduale.* Una terza nota, *Sui punti iper-*

complessi di una ipersuperficie algebrica ordinaria dell' S_r *complesso,* stabilisce le condizioni di appartenenza di un punto ipercomplesso, rappresentato da una n-pla ordinata di punti dell' S_r complesso, ad una data ipersuperficie di questo S_r. Un' altra particolare ricerca riguarda la dimostrazione del teorema fondamentale per la caratterizzazione delle *Curve algebriche complete autoduali,* ed il calcolo del carattere cuspidale e del carattere singolare di una tale curva. Ed un quinto contributo, *Sulle curve osculatrici di un ramo lineare o superlineare di una curva algebrica,* ha lo scopo di dimostrare che ogni curva osculatrice nell' origine ad un ramo lineare o superlineare di una curva algebrica piana è autoduale, e studia le proprietà che ne derivano per la V_3 determinata in S_5 da ogni tale curva osculatrice considerata come curva completa.

Ancora nel campo delle matematiche pure, sono da segnalare due note del prof. Donato Greco. Nella prima, *Sui gruppi che sono somma di quattro o cinque sottogruppi,* l' autore estende ai gruppi infiniti diversi risultati già da lui precedentemente stabiliti per i gruppi finiti e fornisce alcune precisazioni, colmando una lacuna esistente in precedenti ragionamenti sull' argomento. Nella seconda, riguardante *Un' osservazione sul problema di Dirichlet,* egli assegna le condizioni sufficienti per la risolubilità del problema di Dirichlet in certe classi funzionali considerate dall' Amerio.

Alla scienza delle costruzioni si riferisce una nota del prof. Tullio Renzulli sopra *Il problema dell' asta carica di punta in campo elasto-plastico,* che riguarda uno studio inteso alla determinazione del carico critico di una trave in regime elasto-plastico, rimovendo la ipotesi della invariabilità del carico assiale. Applicando il metodo delle variazioni al sistema di equazione differenziale che regola il fenomeno della inflessione laterale, si ritrova la formula del Kármán, e sotto alcune ipotesi si integra detto sistema, trovando così la equazione della deformata dell' asse della trave sotto carichi maggiori di quello critico.

Anche nel settore dell' Astronomia è da segnalare un interessante studio teorico, dovuto al dott. Elio Fichera, che verte *Sull' equazione del moto del polo istantaneo di rotazione rispetto al polo medio, in funzione delle coordinate del polo d' inerzia.* Questo contributo, che collegandosi alle antiche ricerche di Arminio Nobile e di Emanuele Fergola sulla sospettata mobilità del Polo di rotazione della terra, continua la lunga tradizione dell' Osservatorio di Capodimonte relativa agli studi sul movimento del polo terrestre, quasi tutti inseriti nei nostri Rendiconti, raggiunge notevoli risultati, che potranno segnare un progresso sensibile nel difficile problema. Mentre negli studi precedenti sull' argomento ci si riferiva, infatti, al polo medio, supponendolo fisso, il Fichera sposta in un certo senso il punto di partenza, e muovendo dalla sola ipotesi di Chandler che il polo istantaneo di rotazione debba descrivere un cerchio intorno

al polo di inerzia, ricava quale possa e debba essere la polodia quando il polo di inerzia si sposta secondo certe leggi relativamente semplici.

Facendo sèguito ad uno studio di Chimica industriale inserito nel nostro Rendiconto del 1955, il prof. Riccardo SERSALE ha pubblicato una nota dal titolo: *Fasi ed habitus cristallino degli alluminati di calcio idrati*, nella quale ha riferito sulla evoluzione delle fasi cristalline metastabili, che si originano addizionando acqua di calce a soluzioni ricavate dibattendo con acqua sia del cemento alluminoso, sia dell' alluminato monocalcico, verso la fase cristallina stabile. Cristalli di habitus esagonale sono quelli delle fasi metastabili; cubici, invece, quelli della fase stabile: l' alluminato tricalcico esaidrato. Sono state altresì analizzate le variabili che influenzano la suddetta evoluzione, ed è stata esaminata l'azione che può esercitare l' aggiunta di piccole quantità di sostanze tensioattive al sistema considerato, in varie condizioni di temperatura.

Si giunge così alle ricerche nel campo geologico e petrografico, nel quale sono da ricordare due note, rispettivamente dovute al dott. Vincenzo MINIERI e al dott. Renato SINNO. Nella prima di esse si indaga *Sull' alterazione di alcuni inclusi delle « argille scagliose » della provincia di Avellino*, esaminando la particolare colorazione che essi presentano — colorazione dovuta a peculiari solfuri metallici — e concludendo che la sedimentazione del materiale che originò quelle argille variamente colorate dovette avvenire a notevole profondità, in un ambiente marino a carattere riducente. Gli spettri di polvere ottenuti con i raggi X, confrontati con quelli dei minerali che l' analisi chimica lasciava prevedere, hanno permesso di stabilire che l' alterazione superficiale degli inclusi conduce alla formazione di goethite e di limonite.

Nella seconda vengono riferiti i risultati dello *Studio geologico e petrografico della zona Pozzuoli - Cigliano - Arco Felice*, estendendo le osservazioni stratigrafiche di dettaglio compiute l' anno precedente nella zona Monte Olibano-Pozzuoli, e stabilendo, in base alla successione dei prodotti piroclastici flegrei, che il cratere di Cigliano è posteriore a quelli di Agnano e della Solfatara ed immediatamente precedente a quello di Astroni, il quale fornì i prodotti che oggi ammantano quasi completamente il cono di Cigliano. Di queste pozzolane di Cigliano, che costituiscono anche la massima parte della terrazza de « La Starza », è stato eseguito uno studio chimico e petrografico.

Interessanti comunicazioni verbali sulla propria attività scientifica o su recenti manifestazioni culturali sono state esposte da diversi nostri consoci. Così, ad esempio, il collega COLAMONICO ha riferito sulla *Carta de la utilizzazione del suolo d' Italia*, di cui sotto la sua direzione sono stati recentemente pubblicati, a cura del Consiglio Nazionale delle Ricerche e della Direzione generale del Catasto, i primi due fogli, relativi alla

Calabria; ed il socio DIAMARE ha discorso, con rilievi storico-critici, di sue ricerche, compiute in varia epoca, sopra la *istofisiologia della secrezione lattea* e sulle *relazioni tra gonadi ed equivalenti surrenali*, ricerche che sembrano pressocchè ignorate da altri studiosi.

A norma delle disposizioni statutarie, il Rendiconto ha accolto la consueta Relazione annuale del Segretario ed i processi verbali delle tornate accademiche.

Come negli anni precedenti, abbiamo continuato ad accrescere i rapporti con associazioni ed istituti culturali, stabilendo nuovi cambi di pubblicazioni periodiche con la Facoltà di Scienze dell' Università di Kanazawa in Giappone, con la Biblioteca pubblica statale dell' Accademia delle Scienze dell' Ucraina, con l' Istituto Zoologico dell' Accademia Polacca delle Scienze di Varsavia, con la Geological Society di Lvov (URRS), con la Facoltá di Scienze e con l' Istituto Politecnico di Jassy (Romania), con la rivista Matematikai Lapok di Budapest, ecc.

Abbiamo altresì partecipato, direttamente con nostri delegati o indirettamente mediante messaggi di adesione, a numerose celebrazioni, onoranze e congressi: ricordo, fra tante, le onoranze al consocio Mauro PICONE che ha lasciato l' insegnamento per limiti di età, la commemorazione di Federico ENRIQUES nel decennale della scomparsa, la celebrazione di Amedeo AVOGADRO nel primo centenario della morte, i Congressi Nazionali di Fisica e di Zoologia, il Convegno Internazionale sulle costanti fondamentali della Fisica, ecc.

Due gravi perdite ha subìto la nostra Accademia nel corso dell' anno 1956. Il 21 gennaio cessava improvvisamente di vivere in Napoli, nel pieno della sua prodigiosa attività, Adriano GALLI, nostro socio nella sezione delle scienze matematiche dal 3 giugno 1950. Ordinario di Scienza delle Costruzioni, preside della Facoltà di Ingegneria, pro-rettore della nostra Università, presidente dell' ordine degli Ingegneri della provincia di Napoli, consulente delle maggiori imprese edilizie partenopee, il nostro eminente collega ha legato indissolubilmente il suo nome all' insegnamento, alla scienza, alla tecnica, lasciando in ciascuno di questi campi — nonostante la brevità della sua vita, stroncata a soli cinquantadue anni — orma vasta e duratura. Maestro nel senso più completo e nobile della parola, aveva dato vita ad una scuola fiorente, che in meno di un decennio annoverava già due vincitori di cattedre universitarie e sei liberi docenti; studioso di solida preparazione, accoppiava al rigore matematico della ricerca teorica nei più svariati campi del vastissimo dominio della scienza delle costruzioni, la modernità delle vedute e la chiarezza dell' esposizione; autore di opere tecniche ardite ed eleganti aveva progettato e diretto la costruzione di viadotti, ponti, canali, strutture portanti, funivie ecc., che contrassegnano molte fra le più notevoli realizzazioni della ricostruzione postbellica del nostro Mezzogiorno. Della sua multiforme attività è spe-

cialmente doveroso per noi ricordare, in questa sede, quella dimostrata dai molteplici lavori inseriti nei nostri Rendiconti. Negli ultimi anni il compianto collega fu infatti fra i più attivi nel riservare al nostro Sodalizio numerose note, tanto sue che di suoi allievi e collaboratori, le ultime delle quali precedettero solo di poche settimane la repentina scomparsa di Lui. Gli specialisti considerano come fondamentali le sue ricerche sulla ellisse di elasticità trasversale, sulle superfici d' influenza delle piastre, sulla instabilità dell' equilibrio elastico, sulle vibrazioni, sulle volte sottili, sui telai spaziali; e citano come modelli di originalità gli studi più recenti, riguardanti il grado di sicurezza, le modifiche al calcolo a rottura, la statica della trave a cassone, i principî di reciprocità, il calcolo dei ponti a trave irrigidente, la viscosità non lineare, le particolarità presentate dal calcolo a rottura in presenza di più caratteristiche della sollecitazione. Ma noi amiamo rievocare di Adriano GALLI, oltre all' aristocrazia dell' ingegno, anche la signorilitá dell' animo, la nobiltà del cuore, l' integrità del carattere, l' attaccamento al dovere; e più vivo e cocente sentiamo il cordoglio per l' immatura scomparsa dell' amatissimo Collega.

Il 24 marzo si spegneva, in età di 82 anni, il socio straniero Edmund Taylor WHITTAKER, emerito di Matematica nell' Università di Edinburgo ed appartenente alla Sezione di Scienze matematiche dal 16 dicembre 1938. Anche di questo eminente studioso, che aveva ottenuto nella sua patria e all' estero riconoscimenti molteplici dell' importanza della sua opera scientifica, sono noti i numerosi contributi in campi svariatissimi che comprendono vari settori dell' analisi, della fisica teorica, della geometria differenziale, della storia della matematica e della fisica. Nel primo ventennio della sua lunga e fervida attività egli aveva pubblicato lavori di teoria delle funzioni, lavori di analisi dedicati a certe classi di equazioni differenziali ordinarie, frazioni continue e serie interpolari, lavori di fisica teorica dedicati alla dinamica dei sistemi particellari e dei corpi rigidi, alla capillarità, al campo elettromagnetico dell' elettrone, al problema dei tre corpi, alla teoria delle perturbazioni dell' astronomia; nel decennio successivo alla prima guerra mondiale si dedicò a ricerche di calcolo numerico e di calcolo delle probabilità; dopo il 1926 trattò principalmente problemi di teoria della Relatività e di teoria dei Quanti, con speciale interesse per l' ottica e per i fenomeni elettromagnetici in un campo gravitazionale; e nell' ultimo periodo della sua vita si occupò quasi esclusivamente di numerose questioni relative allo sviluppo storico e al significato delle varie teorie ed ipotesi fisiche e matematiche, questioni alle quali si era già interessato, a varie riprese, nei periodi precedenti.

Mentre mandiamo alla inobliata memoria dei nostri cari consoci estinti il doveroso omaggio del nostro sempre vivo rimpianto, ci è gradito salutare i novelli colleghi, che sono entrati recentemente a far parte del nostro Sodalizio. Il 16 giugno scorso fu nominato socio ordinario residente

nella sezione di Scienze matematiche il prof. Alfredo FRANCHETTA, ordinario di Geometria analitica e descrittiva nell' Università di Napoli e già nostro socio corrispondente dal 6 novembre 1954; e fu eletto socio corrispondente, nella medesima sezione, il prof. Federico CAFIERO, straordinario di Analisi matematica nell' Università di Pisa.

Per concludere la succinta relazione dell' attività accademica del 1956, ci resta ancora da rilevare che si è provveduto alla nomina del vice-presidente per l' anno 1957, chiamando a tale alto ufficio il consocio Francesco GIORDANI, e che è stato giudicato il concorso al premio biennale accademico 1955-56 sul tema « *Ricerche sulla morfologia comparata dei metameri negli Artropodi* », ritenendo meritevole del premio l' autore della memoria dattiloscritta contrassegnata dal motto « *Mens agitat molem* » e riguardante uno studio sulla *Morfologia del dermascheletro e segmentazione del capo di Anilocra physodes* (L.) *(Crustacea, Isopoda)*.

In conformità delle norme di detto concorso, prego il signor Presidente Generale di voler procedere all' apertura della busta suggellata contenente il nome dell' autore e alla proclamazione del vincitore [1]).

Quale tema del nuovo concorso per il biennio 1957-58 l' Accademia ha fissato il seguente: « *Studi e ricerche sulla cinetica chimica* ». Le condizioni specifiche sono pubblicate nel Rendiconto e nell' Annuario della Società.

[1]) Aperta — secondo le norme del Regolamento di detto premio — la busta suggellata contenente la scheda col nome dell' autore, nell' adunanza plenaria del 27 gennaio 1957, è risultato autore del lavoro premiato il prof. Marcello La Greca, dell' Istituto Zoologico dell' Università di Napoli.

La V_8 di S_{11} determinata dalle coniche osculatrici ad una superficie algebrica di S_3 prolungata nel campo tripotenziale

Nota del socio ordinario **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 5 gennaio 1957)

Sunto. — Si studia la rappresentazione complessa nell' S_{11} complesso di una superficie algebrica dell' S_3 complesso prolungata nel campo tripotenziale.

Premessa. — Data nell' S_3 complesso una superficie algebrica, irriducibile, di ordine n, di equazione:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 , \tag{1}$$

lo studio di tale superficie, diciamo s'', prolungata nel campo tripotenziale, [cioè sostituendo alle quattro variabili complesse x le quattro variabili tripotenziali:

$$X_j = x_j u + y_j v + z_j w , \tag{2}$$

con la tabella di moltiplicazione delle tre unità u, v, w:

$$\begin{array}{c|ccc} & u & v & w \\ \hline u & u & v & w \\ v & v & w & 0 \\ w & w & 0 & 0 \end{array} , \tag{3}$$

e sostituendo all' S_3 (x_i) complesso, l' S_3 (X_i) tripotenziale, e considerando di tale superficie tripotenziale la rappresentazione complessa nell' S_{11} dove si assumono come coordinate omogenee le 12 variabili complesse

$$(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_4, y_4, z_4)] \tag{4}$$

porta allo studio in S_{11} della varietà rappresentata dal sistema:

$$
(5) \qquad \begin{cases} \text{I)} & f(x) = 0 \\ \text{II)} & \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} y_j = 0 \\ \text{III)} & \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} z_j + \frac{1}{2} \left(\sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} y_j \right)^{(2)} = 0 \end{cases}
$$

varietà che come intersezione di tre ipersuperficie di ordine n, è, nel caso generico, una V_8 di ordine n^3.

L' appartenenza alla s^n del punto tripotenziale (X_j), di coordinate (2), [cioè la condizione che il numero tripotenziale $f(X_j)$, sia lo zero dell' algebra dei numeri tripotenziali], porta, precisamente, che le 12 variabili complesse (4), che intervengono come coefficientii delle unità nelle 4 variabili tripotenziali (2), soddisfino al sistema (5), che rappresenta in S_{11} l' intersezione di tre ipersuperficie di ordine n, e quindi una varietà, nel caso generico, di dimensione 8 e di ordine n^3.

Si noti che quando la superficie s^n si prolunga nel campo triduale, anzichè nel campo tripotenziale, si ha pure in S_{11} una varietà V_8 rappresentata dal sistema che si ottiene dal sistema (5) sostituendo alla equazione III) l' equazione che si ottiene da questa sopprimendo il quadrato simbolico. Un tale V_8, è irriducibile se la superfisia s^n è priva di punti multipli. Ciò invece non si verifica nel caso del prolungamento nel campo tripotenziale.

Si noti anche che se in corrispondenza al punto tripotenziale (2) si considera nell' S_3 complesso la conica descritta dal punto di coordinate

$$
(6) \qquad (x_1 + y_1 \rho + z_1 \rho^2, \ldots, x_4 + y_4 \rho + z_4 \rho^2),
$$

al variare del parametro ρ nel corpo complesso, il sistema (5) esprime la condizione perchè la conica suddetta osculi la superficie s^n di equazione (1) nel punto (x_1, x_2, x_3, x_4), e viceversa; sicchè lo studio dell' insieme dei punti tripotenziali della superficie s^n data, equivale allo studio dell' insieme delle coniche dell' S_3 complesso, ambiente della superficie, che osculano la superficie stessa [1]).

[1]) N. Spampinato. *Relazione fra le proprietà di contatto e di osculazione di una curva o superficie con le algebre dei numeri biduali, triduali e tripotenziali.* (La Ricerca, A. VI, N. 4, Istituto Editoriale del Mezzogiorno).

Invece lo studio della s^n prolungata nel campo triduale [2]) equivale allo studio dei piani tangenti alla superficie, cioè allo studio della superficie considerata come *superficie completa*. In tal caso la V_8 che risulta irriducibile se la s^n è priva di punti multipli, risulta costituita da ∞^2 S_6 generatori rispondenti agli ∞^2 punti della superficie. Se la superficie è dotata di punti maltipli la V_8 che si ottiene considerando gli S_6 generatori rispondenti ai punti semplici e alle loro posizioni limiti al tendere di un punto semplice ad un punto multiplo, risulta di ordine η (*ordine completo* della s^n) dato da:

$$(6) \qquad \eta = n + 2m + \mu.$$

essendo μ la classe della s^n ed m la classe di una generica sezione piana della s^n stessa. Se la s^n è priva di punti multipli la (6) da $\eta = n^3$ perchè è $m = n(n-1)$ e $\mu = n(n-1)^2$.

La costruzione dell' S_6 generatore rispondente ad un punto semplice A della superficie s^n dipende dal punto A e dal piano tangente alla s^n in A.

Nel caso invece del prolungamento tripotenziale la varietà di S_{11} rappresentata dal sistema (5) vedremo che *risulta per $n > 2$ sempre riducibile, e la parte irriducibile è costituita da* ∞^2 V^2_6 *generatrici* rispondenti ai punti semplici di s^n e alle loro posizioni limiti (al tendere di un punto semplice ad un punto multiplo). La V^2_6 rispondente ad un punto semplice A di s^n risulta costituita da ∞^2 iperconi quadrici V^2_4 *rispondenti agli* ∞^2 *sistemi di coniche osculatrici la s^n in* A, essendo ciascuno di tali sistemi la rete di coniche osculatrici la s^n appartenenti ad un determinato piano della stella di centro A.

La costruzione di un tale ipercono V^2_4 generatore della varietà dipende, pertanto, in questo caso del prolungamento nel campo tripotenziale, dal punto A, da una tangente ad s^n in A e da un piano osculatore ad s^n passante per tale tangente [3]). Si hanno perciò nella varietà ∞^4 iperconi quadrici generatori V^2_4. Vedremo che gli S_5 ambienti di tali V^2_4 variano in una congruenza di S_5 dell' S_{11}, di ordine 1, composta con la congruenza degli ∞^9 piani di S_{11}, pure di ordine 1, che rappresenta in S_{11} l' S_3 tripotenziale.

Si noti esplicitamente che in questo caso del prolungamento tripotenziale la superficie viene ad essere studiata come insieme dei suoi ∞^4 E_2 che determinano gli ∞^4 iperconi quadrici generatori della V_8. Invece nel

---

[2]) N. Spampinato. *La varietà dell'* S_{11} *determinata da una superficie algebrica.* (La Ricerca, A. VI, N. 3).

[3]) N. Spampinato. *La* V_5 *di* S_8 *determinata dalle coniche osculatrici una curva algebrica piana prolungata nel campo tripotenziale.* (La Ricerca. Istituto Editoriale del Mezzogiorno, Anno VII, 1956).

caso del prolungamenlo triduale la superficie viene ad essere studiata come insieme delle sue ∞^2 *calotte piane* che determinano gli ∞^2 S_6 generatori della V^{η}_8; con η dato dalla (6), dipendente dai tre caratteri proiettivi n, μ ed m. Vedremo, invece, che nel caso del prolungamento tripotenziale l'ordine della V_8 costituita dagli ∞^4 iperconi V^2_4 generatori dipende solo da n, ed è precisamente $4n$. Per $n = 2$ dà una V^8_8.

Nel caso $n > 2$ il sistema (5) rappresenta sempre una varietà riducibile, di cui fa parte: una V_8^{4n}, contenente gli ∞^1 iperconi quadrici generatori suddetti, rispondenti ai punti semplici della superficie, e una seconda varietà, ad 8 dimensioni, di ordine $n(n+1)(n-2)$, determinata dagli ∞^2 E_2 di flesso della superficie. Se la superficie è dotata di curva multipla, di multiplicità > 2, della varietà rappresentata dal sistema (5) fa parte pure una varietà a 9 dimensioni, determinata da tale curva multipla, costituita da ∞^1 S_8 generatori.

1. *Le* V_5 *della* V_8 *rispondenti alle sezioni piane della superficie* s^n.

Nell' $S_3(x_j)$ di S_{11} di equazioni:

$$(7) \qquad y_j = 0\,, \qquad z_j = 0\,, \qquad (j = 1, .., 4)$$

dove supporremo data la superficie s^n di equazione (1), consideriamo il piano S_2 di equazione:

$$(8) \qquad a_1 x_1 + .. + a_4 x_4 = 0\,,$$

e sia c^n la sezione di S_2 con la s^n. Prolungando questa curva sezione nel campo tripotenziale si avrà in corrispondenza in S_{11} la V_5 rappresentata in S_{11} dal sistema di sei equazioni che si ottiene associando alle tre equazioni I), II) e III) la (8) e le altre due seguenti:

$$(8') \qquad a_1 y_1 + ... + a_4 y_4 = 0\,,$$

$$(8'') \qquad a_1 z_1 + ... + a_4 z_4 = 0\,,$$

Tale V_5 appartiene all' S_8 di S_{11} rappresentato dalle tre equazioni (8), (8') e (8'') è dà la rappresentazione complessa della c^n del piano S_2 prolungata nel campo tripotenziale. Essa costituisce l'intersezione dalla V_8 rappresentata dal sistema (5) con l' S_8. E' costituita da ∞^1 iperconi quadrici generatori V^2_4 e da un numero finito di S_5 quelli rispondenti ai flessi della c^n [gli iperconi generatori rispondono agli E_2 non di flesso

della c'', ovvero alle ∞^1 reti di coniche osculatrici la c'' (e quindi la s'') determinate da tali ∞^1 E_3 non di flesso] e quelli rispondenti agli eventuali punti doppi della c''.

Nota. — In S_{11} consideriamo l' S_7' di equazioni:

(9) $$x_1 = \ldots = x_4 = 0$$

congiungente l' S_3' (y_i) di equazioni:

(10) $$x_i = 0\,, \qquad z_i = 0$$

con l' S_3'' (z_i) di equazioni:

(11) $$x_j = 0\,, \qquad y_j = 0.$$

Tale S_7' se è $n > 2$ appartiene sempre alla V_8 di equazioni (5) con la multiplicità $n(n-1)(n-2)$ perchè è n-plo per l' ipercono di equazione I), $(n-1)$-plo per l' ipercono di equazione II) ed $(n-2)$-plo per la ipersuperficie di equazione III). Nel caso $n = 2$ l' S_7' non appartiene alla V_8, tratteremo quindi separatamente il caso $n = 2$ dal caso $n > 2$. Per ora notiamo che nel caso $n > 2$ la V_5'' rispondente alla sezione c'' ha in S_7' l' S_5' congiungente il piano di $S_3'(y_j)$ di equazione (8') con il piano di $S_3''(z_j)$ di equazione (8''). Tale S_5' è per la V_5 di multiplicità $n(n-1)(n-2)$.

2. *La* V^8_8 *di* S_{11} *determinata da una quadrica di* S_3.

Nel caso $n = 2$ il sistema (5), associandovi le equazioni (9) di S_7', si riduce alla sola equazione data dalla III)

(12) $$\frac{1}{2}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_j} y_j\right)^{(2)} = f(y_j) = 0.$$

In questo caso in S_7' pertanto la V_8 ha il cono di vertice S_3'' che proietta da detto vertice la superficie s' di $S_3'(y_i)$ di equazione (12) cioè la superficie omologa della data s^2 in $S_3(x_i)$ nella proiettività fra S_3 ed S_3' di equazioni:

(13) $$x_1 = y_1\,, \ldots, x_4 = y_3\,.$$

Si ha perciò in S_7' una V'^2_6, costituita, *supposta la quadrica* s^2 *non*

cono, da due sistemi di ∞^1 S_5 ottenuti proiettando da S_3'' i due sistemi di rette della quadrica s' di S_3'.

Un $S^*_8 = S_7'$ A con A nella data quadrica s^2 di S_3, seca la V^8_8 di equazioni (5) nelle V'^2_6 che la V_8 ha in S_7' e in una V^2_6 (A) residua. Infatti posto A $(\rho\, a_j)$ e indicate con

$$(14) \qquad (\rho, y_1, \ldots, y_4, z_1, \ldots, z_4)$$

le coordinate correnti in tale S_8^* congiungente A con S_7', la varietà intersezione della V_8 con l' S_8^* risulta rappresentata dalle due equazioni

$$(15) \qquad \rho \left(\sum \frac{\partial f}{\partial a_j} y_j \right) = 0$$

$$(16) \qquad \rho \left(\sum \frac{\partial f}{\partial a_j} z_j \right) + \frac{1}{2} \left(\sum \frac{\partial f}{\partial a_j} y_j \right)^{(2)} = 0$$

La (15) si spezza in due equazioni. La prima associata alla (16), che si riduce all' equazione:

$$(17) \qquad \left(\sum \frac{\partial f}{\partial a_j} y_j \right)^{(2)} = 0$$

rappresenta la V'^2_6 che la V_8 ha in S_7'. La seconda associata alla (16) rappresenta l' intersezione dell' $S_7 = S_3'' \pi'$ A (con π' piano tangente alla s' nel punto A' avente in S_3' ambiente della s' le stesse coordinate (a_j) di A) con la V^2_7 rappresentata in S^*_8 della (16). Si tratta quindi di una V^2_6 che indicheremo con V^2_6 (A). Si noti che questa varietà contiene il punto A di s^2 che la determina, perchè tale punto, come punto dell' S_8^*, risponde al valore $\rho \neq 0$ e le y_j e z_j tutte nulle. Si ha perciò:

I) *Un* $S_8^* = S_7'$ A, *con* A *appartenente alla quadrica* s^2 *non cono data in* $S_3(x_j)$, *seca la* V^8_8 *di* S_{11}, *determinpta da tale quadrica, in una* V'^2_6 *fissa dell'* S_7', *che si ottiene proiettando da* S_3'' *la quadrica* s' *di* S_3' *omologa della* s^2 *nella proiettività* $x_j = y_j$ *fra* S_3 *ed* S_3', *e in una* V^2_6 (A) *residua appartenente all'* S_7 *congiungente il punto* A, *con* S_3'' *e col piano* π' *tangenie alla* s' *nel punto* A' *omologo di* A *in detta proiettività. Tale* V^2_6 (A) *contiene il punto* A.

Intersechiamo ora la V_8 con un iperpiano S_9 passante per S_7' e secante l' $S_3(x_j)$ in una retta r in posizione generica rispetto alla superficie s^2 e quindi secante questa quadrica in due punti, diciamo A e B.

La varietà intersezione della V_8 con l' S_9 dovrà contenere le intersezioni della V_8 con i due S_8 congiungenti S_7' con A e B, e quindi si spez-

zerà nella V^2_6 che la V_8 ha in S_7' contata due volte, e nelle due V^2_6 (A) e V^2_6 (B) ulteriori intersezioni con tali due S_8, per la proprietà I). Segue che in un S_8 congiungente S_7' con un punto P di r distinto da A e da B, e quindi non appartenente alla quadrica s^2, la V_8 ha soltanto la V^2_6 che ha in S_7'. Tale proprietà si può dimostrare direttamente considerando l'intersezione della V_8 con l' $S_8^* = S_7'$ A, considerato sopra, però nell'ipotesi che il punto A di S_3 (x_i) non appartenga alla quadrica. In tal caso sostituendo le equazioni parametriche di detto S_8^* nel sistema (5) la prima equazione I) dà l'equazione

$$(\mathrm{I_A}) \qquad \rho^2 f(a_i) = 0 ,$$

ed essendo, per l'ipotesi fatta, $f(a_i) \neq 0$ deve essere $\rho^2 = 0$ e quindi la varietà intersezione non ha alcun punto fuori dell' S_7', rappresentato in S_8^* con le coordinate (14) dall'equazione $\rho = 0$. Tenendo conto che la radice $\rho = 0$ per l'equazione ($\mathrm{I_A}$) è doppia si ricava che la V^2_6, che la V_8 ha in S_7', è doppia per la V_8. Si ha perciò:

II) *La* V^2_6 *che la* V^8_8 *ha in* S_7' *è doppia per la* V^8_8. *Un* $S_9 = S_7' r$ *con* r *in* S_3 *seca la* V^8_8 *in detta* V^2_6 *contata due volte e nelle* V^2_6 (A) *e* V^2_6 (B) *rispondenti ai punti* A *e* B *in cui la retta* r *seca la quadrica* s^2.

III) *La* V^8_8 *è costituita da* ∞^2 *varietà generatrici* V^2_6 (A) *al variare di* A *nella quadrica* s^2 *di* S_3 *che la determina in* S_{11}. *L'* S_7 *ambiente di una tale* V^2_6 (A) *generatrice è l'* S_7 *congiungente il punto* A, *il piano* π' *di* S_3' *tangente alla quadrica* s' *omologa di* s^2 *nella proiettività di equazioni* (13) *nel punto* A' *omologo di* A *in detta proiettività, e l'* S_3''. *La* V^2_6 (A) *si ottiene intersecando tale* $S_7 = S_3''\pi'$A (*che è un iperpiano dell'* $S_8^* = S_7'$A) *con la* V^2_7 *di* S_8^* *di equazione* (16).

Consideriamo ora, in corrispondenza ad un fissato punto A della quadrica s_2 di S_3 (x_i), la stella di piani di S_3 di centro A, e le ∞^2 coniche sezioni di s^2 con tali piani. Per quanto è ricordato nel n. 1 a ciascuna di tali coniche risponde nella V_8 una varietà V_5 costituita da ∞^1 iperconi quadrici V^2_4, rispondenti agli ∞^1 E_2 della c^2 fissata. Se consideriamo, in particolare, in tale conica c^2 l' $E_2 = AA_1 A_2$, [indicando con A_1 e A_2 i punti di c^2 posti, rispettivamente, nell' intorno del 1° ordine e del 2° ordine del punto A], l'ipercono V^2_4 della V_5 determinato da tale E_2 [di origine A, di tangente AA_1 e posto nel piano congiungente A, A_1 e A_2 (cioè il piano della conica c^2)] apparterrà alla V^2_6 (A) generatrice della V_8 rispondente al punto A. Ne segue che per ciascuno degli ∞^2 E_2 di origine A e posti nella quadrica s^2 (e quindi nei piani della stella di centro A di S_3), si ha nella V^2_6 (A) generatrice della V^8_8, un ipercono V^2_4 determinato da detto E_2, e che indicheremo con V^2_4 (AA_1 A_2) o con V^2_4 (E_2). Si ha pertanto:

IV) *Ogni* V^2_6 (A) *generatrice della* V^8_8 *è costituita da* ∞^2 *iperconi quadrici* V^2_4 $(AA_1\ A_2)$ *in corrispondenza con gli* ∞^2 E_2 *di origine* A *posti nella quadrica* s^2 *che determina la* V^8_8.

Nota. — Vedremo che anche nel caso $n>2$ la superficie s^n determina, in corrispondenza ai suoi ∞^2 punti semplici A, ∞^2 varietà generatrici V^2_6 (A), appartenenti alla varietà rappresentata dal sistema (5); *e costituenti una varietà* V_8 *di* S_{11} *di ordine* $4n$, *che dà tutta la varietà rappresentata dal sistema* (5) *solo nel caso* $n=2$, nel qual caso si ha la V^8_8. Si ha però sempre la proprietà che ciascuna di tali ∞^2 varietà generatrici V^2_6 (A) è costituita da ∞^2 iperconi quadrici V^2_4, e quindi la V_8^{4n} risulta sempre costituita da ∞^4 iperconi quadrici generatori rispondenti agli ∞^4 E_2 non di flesso della superficie s^n.

Considerando in S_3 tutti gli ∞^7 E_2 si hanno in S_{11} ∞^7 iperconi quadrici V^2_4 formanti una congruenza che risulterà, come vedremo, di ordine 1, e che indicheremo con (V^2_4). Ogni varietà generatrice V^2_6 (A) della V_8^{4n} risulta sempre composta con ∞^2 iperconi di detta congruenza (V^2_4) di S_{11}, che occorre quindi studiare. Vedremo inoltre che ogni S_5 ambiente di un ipercono V^2_4 della congrenza (V^2_4) contiene altri ∞^1 di tali ∞^7 iperconi: restano quindi determinati in S_{11} ∞^6 S_5 ambienti di detti iperconi, costituenti una congruenza, che indicheremo con (S_5) e che risulta pure di ordine 1. E' di tale argomento che ci occuperemo nel n. seguente.

3. *Le congruenze* (V^2_4) *ed* (S_5) *di* S_{11}.

Se indichiamo con S_2 il piano congiungente i tre punti infinitamente vicini costituenti l' $E_2 = AA_1\ A_2$ l' S_5 ambiente dell'ipercono quadrico V^2_4 rispondente a tale E_2 è l' S_5 congiungente il punto A di S_3, i due punti A' e A_1' si S_3' e i tre punti A'', A_1'' e A_2'' di S_3'', indicando in generale con X' e X'' i punti di S_3' ed S_3'' aventi le stesse coordinate di un dato punto X di S_3, e quindi corrispondenti di X nella proiettività (13) e nella proiettività

$$x_1 = z_1, \ldots, x_4 = z_4. \tag{18}$$

Se l' E_2 appartiene ad una curva c^n tale S_5 congiunge il punto A di c^n, la retta $t' = A'\ A_1'$ omologa della tangente $t = AA_1$ a c^n in A nella proiettività (13), ed il piano $\pi'' = A''\ A_1''\ A_2''$ omologo del piano osculatore $\pi = AA_1\ A_2$ alla c^n in A nella protettività (18). Sicchè tale S_5 si può considerare determinato dal punto A, dalla retta t della stella di centro A e dal piano π del fascio di asse t. Di tali terne (A, t, π) punto - retta - piano con la retta passante per il punto ed il piano passante per la retta, ve ne sono in S_3 ∞^6. Si hanno pertanto in corrispondenza in S_{11} ∞^6 S_5, for-

manti la congruenza (S_5). Per un generico punto P di S_{11} passa uno solo S_5 della congruenza (S_5). Infatti nell'S_7 congiungente S_3 con S_3' i piani del tipo $AA'\,A_1'$ formano una congruenza lineare, distribuiti nelle ∞^3 stelle di piani aventi ciascuna come asse una retta AA' e come S_4 ambiente l'$S_4 = AS_3'$. Detto P^* il punto proiezione di P da S_3'' nell'$S_7^* = S_3\,S_3'$ e indicato con $AA'\,A_1'$ il piano di detta congruenza passante per P^*, detto P'' il punto di S_3'' proiezione di P da S_7^*, il piano $A''\,A_1''\,P''$ congiunto con $AA'\,A_1'$ dà l'unico S_5 della congruenza (S_5) passante per P.

Si ha perciò:

La congruenza (S_5) *è di ordine* 1.

Nel piano π dell'$E_2 = AA_1\,A_2$, considerando fisso l'$E_1 = AA_1$, facciamo variare A_2 nell'intorno del primo ordine di A_1 (e quindi si otterranno punti che fanuo parte dell'intorno del second'ordine di A). Si otterranno ∞^1 E_2 a ciascuno dei quali corrisponde un ipercono quadrico V^2_4. Tali iperconi V^2_4 sono contenuti nello stesso S_5 determinato dalla terna (A, t, π), con $t = AA_1$, e per un generico punto di detto S_5 passa un solo ipercono V^2_4. Ne segue che:

La congruenza (V^2_4) *costituita dagli* ∞^7 *iperconi* V^2_4 *determinati in* S_{11} *dagli* ∞^7 E_2 *di* S_3, *è di ordine* 1.

Si osservi esplicitamente che tale congruenza (V^2_4) dell'S_{11} dà una rappresentazione in S_{11} dell'S_3 differenziale che si ottiene dall'S_3 complesso quando si considera come insieme dei suoi ∞^7 $E_2 = AA_1\,A$

4. *Il caso* $n > 2$.

Nell'S_{11} consideriamo l'S_8^* congiungente un punto A fissato in $S_3\,(x_i)$ con l'S_7' congiungente i due spazi $S_3'\,(y_j)$ ed $S_3''\,(z_j)$.

Se indichiamo con $(\rho a_1, \rho a_2, \rho a_3, \rho a_4)$ le coordinate di A, con ρ fattore di proporzionalità, per coordinate di un punto variabile in S_8^* si possono assumere le nove variabili

$$(\rho, y_1, \ldots, y_4, z_1, \ldots, z_4), \tag{19}$$

ed il punto di S_8^* che ha le coordinate (19) ha, come punto dell'S_{11}, le coordinate

$$(\rho a_1, \ldots, \rho a_4, y_1 \ldots, y_4, z_1, \ldots, z_1). \tag{20}$$

L'intersezione della varietà di S_{11} rappresentata dal sistema (5) con l'S_8^* risulta pertanto rappresentata in S_8^* dal sistema che si ottiene

dalle tre equazioni (5) sostituendo alle x_j i prodotti ρa_j, cioè dal sistema:

$$(5^*)\quad \begin{cases} \rho^n f(a_j) = 0 \\ \rho^{n-1}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial a_j} y_j\right) = 0 \\ \rho^{n-1}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial a_j} z_j\right) + \frac{1}{2}\rho^{n-2}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial a_j} y_j\right)^{(2)} = 0, \end{cases}$$

Per studiare la varietà di S_8^* rappresentata dal sistema (5*), distinguiamo i due casi in cui A non appartiene o appartiene alla superficie s^n di equazione (1), data in S_3 (x_j).

a) *Se* A *non appartiene alla* s^n risulta $f(a_j) \neq 0$ e quindi della prima delle (5*) si ricava $\rho = 0$ e le altre due equazioni, essendo $n > 2$, risultano soddisfatte. L'equazione $\rho = 0$ rappresenta nell'$S_8^* = AS_7'$ l'iperpiano S_7', nelle coordinate (19), e quindi tutto l'S_7' appartiene alla varietà di S_{11} rappresentata dal sistema (5). Ogni soluzione (19) con $\rho = 0$ risulta per il sistema (5*) di multiplicità $n(n-1)(n-2)$ almeno e quindi si ha:

I) *Se è* $n > 2$ *l'*S_7' *di* S_{11} *appartiene sempre alla varietà rappresentata dal sistema* (5), *con la multiplicità* $n(n-1)(n-2)$. *Per* A *non appartenente alla superficie* s^n *nell'*$S_8^* = AS_7'$ *tale varietà non ha altri punti fuori di* S_7'.

b) *Se* A *appartiene alla* s^n, essendo $f(a_j) = 0$ la prima equazione del sistema (5*) risulta sempre soddisfatta, qualunque sia ρ. In tale caso occorre studiare il sistema delle altre due equazioni che rappresentano in S_8^* separatamente due ipersuperficie V_7 di ordine n, nelle coordinate (19).

Tale sistema si spezza nei due sistemi:

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} \rho^{n-1} = 0 \\ \rho^{n-2}\left[\rho \sum \frac{\partial f}{\partial a_j} z_j + \frac{1}{2}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial a_j} y_j\right)^{(2)}\right] = 0. \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} \sum \frac{\partial f}{\partial a_j} y_j = 0 \\ \rho^{n-2}\left[\rho\left(\sum \frac{\partial f}{\partial a_j} z_j\right) + \frac{1}{2}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial a_j} y_j\right)^{(2)}\right] = 0. \end{cases}$$

Il sistema (I) si spezza a sua volta in due sistemi

$$(I_1) \qquad \rho^{n-1} = 0 \,, \qquad \rho^{n-2} = 0$$

$$(I_2) \qquad \rho^{n-1} = 0 \,, \qquad \left(\sum \frac{\partial f}{\partial a} y_j\right)^{(2)} = 0.$$

Il sistema (I_1) rappresenta l' S_7' constatato $(n-1)$ $(n-2)$ volte. Il sistema (I_2) rappresenta nell' S_7', contato $n-1$ volte, la V_6^{n-2} che si ottiene proiettando da $S_3''(z_j)$ la V_2^{n-2} di $S_3'(y_j)$ $(n-2)$-ma polare del punto $A'(a_j)$ rispetto alla s'^n di equazione $f(y_j) = 0$.

La prima del sistema (II) rappresenta in $S_3'(y_j)$ il piano π' tangente alla superficie s'^n nel suo punto A' (supposto il dato punto A in s^n generico, e quindi semplice). La stessa equazione rappresenta in S_8^* l' $S_7^* = S\pi' S_3''$ proiettante detto piano π' dall' S_4 congiungente il punto A da $S_3''(z_j)$. La seconda equazione del sistema (II) rappresenta in S_8^* la V_7^n spezzata nell' S_7' contato $n-2$ volte e nella iperquadrica V_7^{*2} di equazione:

$$(21) \qquad \rho\left(\sum \frac{\partial f}{\partial a_j} z_j\right) + \frac{1}{2}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial a_j} y_j\right)^{(2)} = 0.$$

Si ha peeciò:

Il sistema (II) *rappresenta in* $S_8^* = S_7 A$, *con* A *generico punto di* s^n:

1°. *L'* S_6' *di* S_7' *congiungente* S_3'' *con il piano* π' *tangente alla* s'^n *nel punto* A.

2°. *La* V_6^2 (A) *intersezione dell'* $S_7^* = S_3''\pi' A$ *con la iperquadrica* V_7^{*2} *di* S_8^* *rappresentata dall' equazione* (21).

Sicchè *al generico punto* A *di* s^n *risponde nella varietà rappresentata dal sistema* (5) *un' iperquadrica* V_6^2 (A) *generatrice appartenente* all' $S_7^* = S_3''\pi' A$.

Al variare di A fra i punti semplici della s^n, e alle posizioni limiti al tendere di A ad un eventuale punto multiplo della s^n, si avranno in S_{11} ∞^2 iperquadriche generatrici V_6^2 che costituiranno una varietà, ad 8 dimensioni, diciamo V_8, che apparterrà alla varietà rappresentata dal sistema (5). Vedremo che la V_8 coincide con questa varietà (5) solo per $n = 1$ e $n = 2$. La V_8 risulta sempre di ordine $4n$. La varietà rappresentata dal sistema (5) per $n > 2$ risulta sempre riducibile. Se la s^n è priva di curva multipla vedremo che si spezza nella V_8^{4n}. e in una V_8, di ordine $n(n+2)(n-2)$, rispondente agli ∞^2 E_2 di flesso della superficie s^n.

5. *Ordine della* $\overline{V}_8$.

Nella (21) la variabile ρ è al primo grado e quindi il punto A dell' S_8^* rispondente ai valori $\rho \neq 0$ $y_j = z_j = 0$ appartiene alla V_7^{2*} rappresentata dalla (21) e sarà semplice o doppio per essa secondo che è non nullo o nullo il coefficiente di ρ dato dalla forma lineare nelle z_i:

$$\sum \frac{\partial f}{\partial a_i} z_i \tag{22}$$

Questa forma risulta identicamente nulla quando e solo quando il punto A della s^n è multiplo. Si ha perciò:

Il punto A *appartiene sempre alla* V_7^{*2} *ed è per essa semplice o doppio secondo che è semplice o multiplo per la* s^n.

Si noti ora che se A ha per la s^n una multiplicità > 2 il sistema (II) risulta identicamente soddisfatto e tutto l' $S_8^* = S_7'$ A appartiene alla varietà (5). Nel caso che A sia doppio per la s^n la prima equazione del sistema (II) è identicamente soddisfatta e la seconda si riduce a:

$$\left(\sum \frac{\partial f}{\partial a_j} y_i\right)^{(2)} = 0 \tag{22}$$

e rappresenta in S_3' il cono quadrico tangente alla s'^n nel punto doppio A. In S_8^* rappresenta, pertanto, il cono che si ottiene proiettando dall' S_4, congiungente A con S_3'', tale cono quadrico di S_3'. Si ha quindi:

Se A *è multiplo per* s^n *con multiplicità* > 2 *tutto l'* $S_8^* = S_7'$ A *appartiene alla varietà* (5). *Se* A *è doppio per la* s^n *la varietà* (5) *ha in* S_8^* *la* V_7^{*2} *che si ottiene proiettando dall'* $S_4 = S_3''$ A *il cono tangente ad* s'^n *in* A, *di* S_3' (y_i).

Consideriamo ora il caso che A sia semplice per la s^n. Nella stella di piani di centro A consideriamo un generico piano μ e diciamo c_μ^n la curva sezione di s^n con μ. Sia t la tangente a c_μ^n in A. Sarà t una retta del piano π tangente ad s^n in A. Diciamo A_1 e A_2 i punti di c_μ^n successivi ad A. L' $E_2 = AA_1A_2$ sarà uno degli ∞^4 E_2 di s^n: quello che appartiene alla curva c_μ^n; che prolungata nel campo tripotenziale determina, mediante le sue coniche osculatrici, una V_5, di ordine n^3, nelle S_8 congiungente i tre piani μ, μ' e μ'' e rappresentata dal sistema di equazioni che si ottiene associando al sistema (5) le tre equazioni rappresentanti, rispettivamente in S_3, S_3' ed S_3'', i tre piani μ, μ' e μ''. Detta V_5 è l' intersezione della varietà (5) con l' $S_8 = \mu\mu'\mu''$.

La V_5 in corrispondenza ad ogni $E_2 = AA_1A_2$ *con* A *semplice per* c_μ^n *e non di flesso,* ha un ipercono quadrico $V_4^2(E_2)$ appartenente all' $S_5 =$

$= AA' A_1' A'' A_1'' A_2'' = At' \mu''$, avendo indicato con t' la retta di S_3' contenente l'$E_1 = A' A_1'$. *Se invece* $E_2 = AA_1 A_2$ *è un flesso* per la c_μ'' la V_5 ha un S_5, che si stacca da essa, e precisamente l'$S_5 = At' \mu''$, che, nel caso precedente è l'ambiente dell'ipercono quadrico, $V_4^2 (E_2)$. Si noti che il vertice di questo ipercono è un piano, e precisamente il piano $A' A_1'' A_1''$ di S_7'.

Variando A fra i punti semplici di c_μ'', non di flesso, l'ipercono $V_4^2 (E_2)$ varia in una verietà V_5^{4n}. *Se la* c_μ'' *non ha punti multipli* la V_5 è perciò costituita da questa V_5^{4n} e da $3n(n-2)$ S_5 rispondenti ai $3n(n-2)$ flessi del c_μ'', e dall'$S_5' = \mu' \mu''$ di S_7' contato $n(n-1)(n-2)$ volte. L'ordine della V_5 è

$$(23) \qquad 4n + 3n(n-2) + n(n-1)(n-2) = n^3.$$

Se la c_μ'' ha dei punti multipli, a ciascun punto multiplo risponde pure un S_5 nella V_5 contato tante volte quanti sono i punti di flesso che assorbe tale punto multiplo fra i $3n(n-2)$ flessi della c_μ''. L'ordine complessivo della V_5 riducibile è sempre n^3, e la parte che risponde ai punti semplici non di flesso, e alle loro posizioni limiti, al tendere di un punto semplice ad un flesso o ad un pnnto multiplo, è sempre una V_5^{4n}.

Questa V_5^{4n} costituirà, pertanto, l'intersezione della V_8 con l'$S_8 = \mu\mu'\mu''$ ambiente della V_5^{4n}. Sarà perciò $4n$ l'ordine della V_8. Allo stesso risultato si perviene osservando che per A semplice per la s'' gli ∞^2 iperconi V_4^2 rispondenti ad A nelle ∞^2 V_5^{4n} determinate dalle ∞^2 sezioni piane c_μ'' della s'' con μ variabile nella stella di centro A, costituiscono la $V_6^{*2}(A)$ dell'$S_8^* = S_7^* A$, e che ciascuno di tali iperconi V_4^2 ha in S_7' l'$S_3 = A' \mu''$ contato due volte, e quindi la V_6^{*2} ha in S_7' l'$S_5 = S_3'' A'$ doppio. Variando A nella s'' la $V_6^{*2}(A)$ descrive, per ipotesi, la V_8 e quindi questa varietà ha in S_7' gli ∞^2 $S_4 = S_3'' A'$ al variare di A' in s'^n, ciascuno contato due volte. Si ha perciò:

La V_8 *ha in* S_7' *l'ipercono* S_3'' s'^n *contato due volte.*

Ne segue che la $\overline{V}_8$, come avevano già dimostrato, è di ordine $4n$. Basta a tal fine secarla con un S_9 dell'S_{11} ambiente passante per S_7'. Come intersezione si otterrà tale ipercono, di ordine n, S_3'' s'^n contato 2 volte, ed altre n varietà generatrici $V_6^{*2}(A^i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, indicando con A^i gli n punti in cui la s'' è secata dalla retta che S_9 seca nell'$S_3(x_i)$ ambiente della s''. Si ha perciò:

La $\overline{V}_8$ *costituita dalla* ∞^2 *varietà generatrici* $V_6^{*2}(A)$, *della varietà rappresentata dal sistema* (5), *rispondenti ai punti semplici di* s'', *e alle loro posizioni limiti al tendere di* A *ad un eventuale punto multiplo di* s'', *è di ordine* $4n$.

La $\overline{V}_8^{4n}$ *secata con un* $S_8 = \mu\mu'\mu''$, *con* μ *generico piano di* $S_3(x_i)$, *dà*

la V_5^{4n} *rispondente ai punti semplici, e non di flesso, della curva* c_μ^n *sezione di* s^n *con il piano* μ.

La $\overline{V}_8^{4n}$ *è determinata dagli* E_2 *non di flesso della superficie* s^n.

6. *La varietà di* S_{11} *rispondente agli* E_2 *di flesso della* s^n.

Secando la s^n con il piano π ad essa tangente nel suo punto semplice A, si ha una sezione c_π^n con un punto doppio in A, nodale nel caso generico, cuspidale se il piano π è *tangente stazionario* per la s^n [In tal caso A è un *punto parabolico* della s^n, cioè è un punto della *curva parabolica* della superficie]. Le due tangenti a c_π^n in A (distinte o infinitamente vicine, secondo che A è doppio nodale o cuspidale) sono le due tangenti di flesso alla s^n nel punto semplice A. Se il piano μ della stella di centro A passa per una tale tangente di flesso, la sezione c_μ^n avrà in A un flesso, e quindi un $E_2 = AA_1 A_2$ di flesso. In tal caso non si ha nel piano μ una rete di coniche osculatrici la s^n in A con la generica irriducibile, ma solo la rete di coniche spezzate nella tangente di flesso e in una retta qualunque del piano μ. In questo caso nella V_5^n, rispondente nell' $S_8 = \mu\mu' \mu''$, al punto A non risponde nell' $S_5 = AA' A_1' A'' A_1'' A_2''$ un ipercono V_4^2 (E_2), ma tutto detto S_5. Variando il piano μ nel fascio avente per asse la retta tangente di flesso alla s^n in A considerata, si avranno, in corrispondenza allo stesso flesso $E_2 = AA_1 A_2$, ∞^1 di tali S_5 costituenti l' $S_6 = AA' A_1' S_3''$ congiungente l' S_3'' fisso con il piano congiungente il punto A con la retta di flesso $t' = A' A_1'$ della superficie s'^n. Di tali S_6 ve ne hanno ∞^2 in corrispondenza con le ∞^2 rette osculatrici della s'^n e costituiscono una varietà $\overline{V}_8'$ che farà parte della varietà (5). Secando questa $\overline{V}_8'$ con l' $S_8 = \mu\mu' \mu\mu''$ si otterranno, oltre all' $S'_5 = \mu' \mu''$ contato $n(n-1)(n-2)$ volte i $3n(n-2)$ S_5 rispondenti ai $3n(n-2)$ flessi della sezione c_μ^n di s^n con il piano μ, supposto che la s^n sia priva di curve multiple, nel qual caso la c_μ^n è priva di punti multipli ed è quindi dotata di $3n(n-2)$ flessi.

Nel caso che la s^n sia dotata di curve multiple la c_μ^n risulta dotata di punti multipli a ciascuno dei quali risponde un S_5 di S_7' contato tante volte quanti sono i flessi che vengono assorbiti nella c_μ^n da un tale punto multiplo. Si ha perciò:

La $\overline{V}_8'$, *rispondente agli* E_2 *di flesso della* s^n, *è di ordine:*

$$(24) \quad \overline{d} = 3n(n-2) + n(n-1)(n-2) = n(n+2)(n-2) = n^3-4n.$$

Essa è costituita da ∞^2 S_6 *generatori passanti per l'* S_3'' *e secanti nell'* $S_7 = S_3 S_3'$ *gli* ∞^2 *piani* $AA' A_1'$, *con* A *in* s^n *e* AA_1 *tangente osculatrice ad* s^n *in* A, *e quindi contenente un* $E_2 = AA_1 A_2$ *di flesso per ogni*

sezione c_μ^n *della* s^n *con un piano* μ *passante per essa. Per un generico punto* A *di* s^n *passano due* S_6 *generatori della* $\overline{V}_8'$, *distinti o infinitamente vicini secondo che* A *non appartiene o appartiene alla curva cuspidale di* s^n.

Si noti che la somma delle due varietà $\overline{V}_8$ e $\overline{V}_8'$ di ordini, rispettivamente $4n$ e $n^3 - 4n$ dà una varietà V_8 di ordine n^3, che è la varietà rappresentata dal sistema (5) nel caso generico, cioè nel caso in cui questa varietà non contiene una varietà a 9 dimensioni (riducibile o irriducibile) caso che si presenta quando la s^n ammette infiniti punti multipli di multiplicità >2, nel qual caso, per ogni tale punto multiplo, fa parte della varietà rappresentata dal sistema (5), l' S_8 che si ottiene congiungendolo con l' S_7', e quindi la varietà contiene infiniti S_8 distinti costituenti, perciò, una varietà a 9 dimensioni, oltre alle due varietà $\overline{V}_8$ e $\overline{V}_8'$ suddette che rispondono ai punti semplici non di flesso, la prima, e ai flessi la seconda, considerando in questo secondo caso anche i flessi assorbiti dai punti doppi, delle sezioni piane della superficie s^n. La V_9 sarà un S_7-cono avente per vertice l' S_7' e di ordine eguale all' ordine della curva della s^n costituita dai suoi infiniti punti multipli con multiplicità >2.

Raccogliendo si ha che :

Se la superficie s^n *è priva di curva multipla o ha al più dotata di curva doppia, (caso a cui si può sempre ricondurre considerando una trasformata birazionale di* s^n*), la varietà determinata in* S_{11} *dalle coniche osculatrici la* s^n, *di equazioni* (5), *è una* V_8 *di ordine* n^3 *spezzata in due varietà* $\overline{V}_8^{4n}$ *e* $\overline{V}_8'^{n^3-4n}$, *la prima determinata dagli* E_2 *di* s^n *non di flesso la seconda dai flessi (o dalle rette osculatrici) di* s^n

An improved method of determining direction of faulting in earthquakes [1])

Nota del dr. **William Mansfield Adams** [2]), *presentata dal socio* **G. Imbò**

(Adunanza del dì 2 febbraio 1957)

Abstract — An improved method is described which plots two points for each station reporting the initial direction of the P-wave motion. The graphical fitting procedure can then be made to twice as many plots as in previous methods. Although this does not improve the accuracy of the result, it does make it easier to see how the nodal lines should be drawn. That is, the inductive step of graphical fitting of the nodal lines is less difficult

Sunto. — Con la presente nota viene introdotto, nelle indagini sismografiche dei terremoti per frattura, un perfezionamento nel metodo abituale delle proiezioni, consentente un raddoppiamento fittizio del numero delle stazioni d'osservazione. Risulta pertanto ovvia la possibilità di una minore indecisione nel tracciamento delle linee nodali:

Introduction.

The purpose of the present paper is to describe an improved method of analyzing P-wave direction of motion data. Previous methods of plotting P-wave data have been reviewed by Scheidegger (1957) who has shown that all the methods are theoretically equivalent.

All previous methods graphically fit by induction a pair of circles or straight lines onto N symbols denoting the character of the initial P-wave motion as observed at N stations. This is so done as to separate the regions of compressions from the regions of dilatations. In general, the more points to which the circles can be fitted and the better the points are distributed in the plane of projection, the easier is the fitting procedure and the more certain is the answer. Whereas previous methods have only plotted one point for each station reading, it can be shown from the characteristics of the data that it is both possible and feasible to plot

---

[1]) Manuscript received 2-III-1957. Contribution from the Istituto di Fisica Terrestre, Università degli Studi di Napoli, Naples, Italy.

[2]) Fulbright Fellow.

two points for each station observing the initial direction of P-wave motion. We now consider these characteristics of the data.

As is well known, the P-wave motions at the ends of any diameter of the focal sphere are similar in nature, either both compressional or both dilatational. This property has been used in the focal methods of projection in order to have all projected points inside the primitive circle: in the method of extended distances it is used to plot phases emitted from the focus above the horizontal plane. Because of this mirror symmetry of the P-wave data with respect to the focus, the direction of motion at both ends of any ray having a reporting station on one end may be considered as known.

Proposed method.

The purpose of this paper is to point out that in those methods which project from one end of the vertical diameter of the focal sphere onto a central, horizontal plane, both ends of a ray having an observatory at either end may be projected onto the plane of the projection. Both plots so determined can be given the type of initial motion observed at the station. The graphical fitting procedure can then be made to twice as many points as in previous methods. This does not improve the accuracy of the result. It does, however, make it easier to see how the nodal lines should be drawn. That is, the inductive step of graphically fitting the nodal lines is less difficult.

It is necessary to consider if the above suggestion is actually applicable to practice. From a study of previous direction of motion studies made in Fault Plane Project at the Dominion Observatory of Canada, HODGSON and ADAMS (in preparation) found that the majority of observations occurred at epicentral distances of 13°, 20°, 78°, and 148°. It was concluded that these relative highs were due to the relative distribution on the surface of the Earth of the seismic stations and the regions of high earthquake activity. Except for the most distant range, which corresponds to the phase PKP, the angles of emission of the rays at the focus corresponding to these epicentral distances are shown in Figure 1. The proposed improvement on the focal methods is applied in Figure 2. It is seen that the suggested improvement is actually practical because both projections are the same order of magnitude. They can, therefore, both be used on the same worksheet. The proposed method is not suitable for the analysis of earthquakes having primarily PKP data. In this case the working scale of the plots inside the primitive circle is not comparable to the working scale of the outside plots. As both plots cannot be used simultaneously, the advantage of the double projection method is lost. We

will call the plot of the end of the focal diameter having a station observation on the other end a *second plot.*

The proposed improvement can be used with the method of projec-

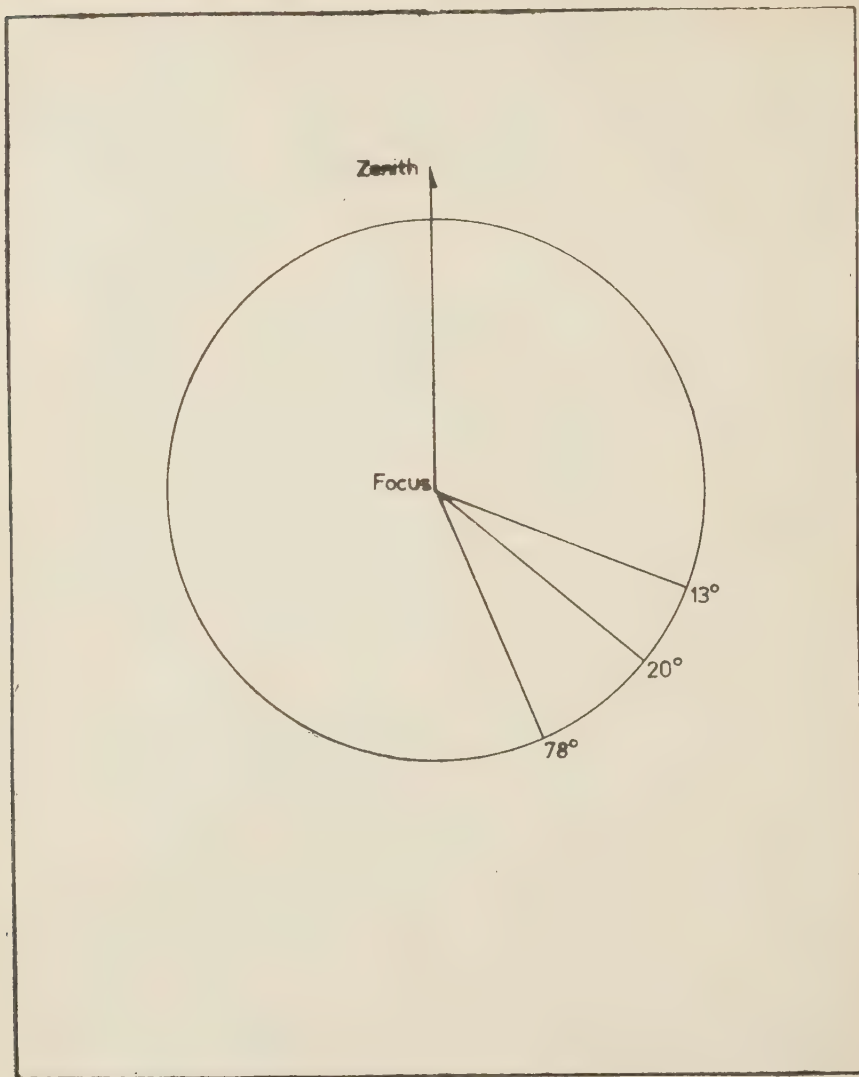



Figure 1 — Angles of emission from the focus for the epicentral distances of 13°, 20°, and 78°.

ting from the focus itself if a concentric cylinder, co-axial to the vertical, is used as the surface of projection. The proposed improvement does not, however, appear applicable to the method of extended distances.

To further demonstrate that the improvement is actually beneficial,

we will apply the proposed method to the Tango earthquake of March 7, 1927. The projection obtained using the proposed double projection method should give a solution easily. This earthquake has been previously studied for direction of faulting by HODGSON (1955).

Application of the proposed method.

We use the double projection from an end of the vertical diameter of the focal sphere onto a central plane. The necessary values of the tangent and cotangent of half the angle of emission of the ray from the

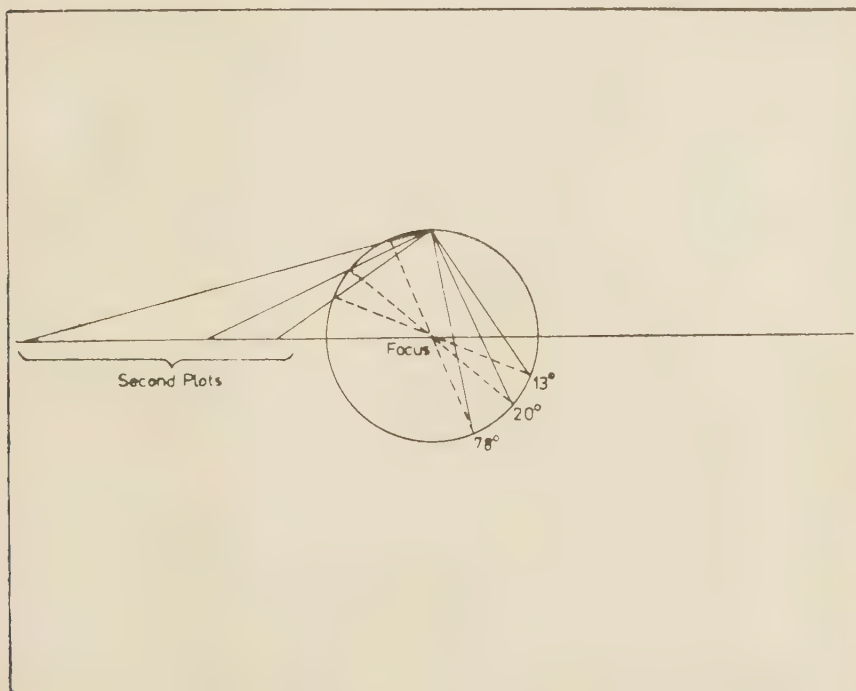



Figure 2 — Application of the proposed double projection method to the epicentral distances of 13°, 20°, and 78°.

focus are determined by transposition from the tables for cotangent of the angle of emission given by HODGSON and STOREY (1953).

We obtain the solution presented in Figure 3 where the void circles represent compressions and the solid circles, dilatations. The straight line is well defined. The circle is constrained by the observations and the geometrical properties of this type of projection to take approximately the position shown. This solution differs only slightly from that given by Hodgson. The purpose of the figure is to show the greater ease

with which a solution can be fitted when the suggested method of projection is used. This diagram should be compared with that given by HODGSON.

Discussion and conclusions.

An improvement has been described and applied which plots two points for each station reporting the initial direction of P-wave motion.

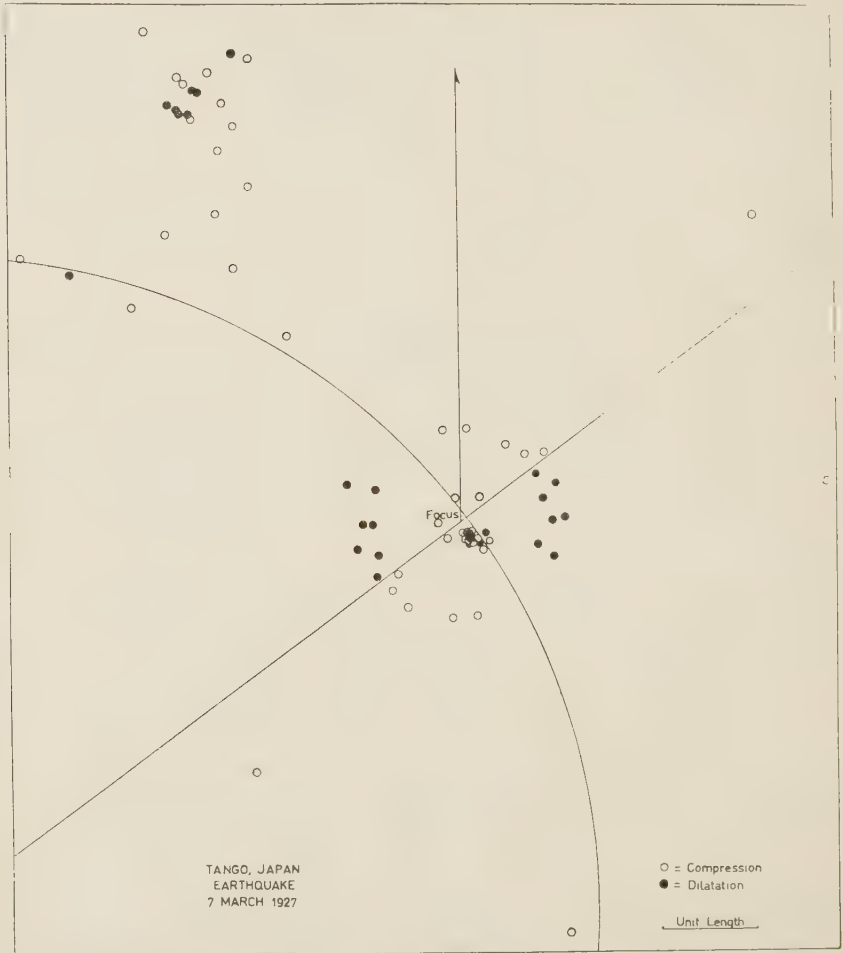



Figure 3 – Application of the proposed double projection method to the earthquake of 7 March 1927 (data from HODGSON).

The graphical fitting procedure can then be made to twice as many points as in the previous methods of analysis. The improved method does not give greater accuracy in the result because the nodal circles which fit

the set of initial plots will necessarily fit the set of second plots; but the method proposed should frequently make the graphical fitting easier. The proposed method of double projection is applicable to the focal methods which project from an end of the vertical diameter of the focal sphere. When the proposed method of analysis is used, it does not matter which end of the vertical diameter is used as they become equivalent in practice. That is, using the double projection method, the resulting projections will be similar.

Acknowledgments.

The author wishes to thank Dr. Otto Nuttli of St. Louis University and Drs. J. H. Hodgson and A. E. Scheidegger of the Dominion Observatory of Canada for stimulating interest in the various methods of P-wave analysis, for many clarifying discussions of the problem, and for reading this paper in manuscript. Professor Imbò, who has made the facilities of the Istituto di Fisica Terrestre at the Università degli Studi di Napoli available to the author, also discussed the problem and read the paper in manuscript. The author, however, is solely responsible for the opinions expressed.

This study has been financially possible due to a Gulf Research Fellowship and a Fulbright Grant to study in Italy.

BIBLIOGRAPHY

Di Filippo, D. and L. Marcelli (1954). « *Uno studio sul terreno di Cefalonia (del 12 agosto 1953) con particolare riguardo alla natura fisica della scossa all' ipocentro*. Annali di Geofisica, Vol. 7, No. 4; pp. 547-561.

Hodgson, J. H. (1955). « *Fault-Plane Solution for the Tango, Japan, Earthquake of March 7, 1927* ». Bull. Seis. Soc. Am., Vol. 45, pp. 37-41

Hodgson, J. H., and W. M. Adams (in preparation). « *Inconsistent Observations in the Fault Plane Project* ».

Hodgson, J. H., and R. S. Storey (1953). « *Tables Extending Byerly' s Fault-Plane Techniques to Earthquakes of any Focal Depth* ». Bull. Seis. Soc. Am., Vol. 43, pp. 49-61.

Scheidegger, A. E. (1957). « *The geometrical representation of fault plane solutions of earthquakes* ». Bull. Seis. Soc. Am., Vol. 47.

Rappresentazione in S_{11} delle reti di sezioni piane di una superficie completa e delle relative curve jacobiane

Nota del socio ordinario **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 2 marzo 1957)

Sunto. — Si studiano due varietà determinate nell'S_{11} da una rete di sezioni piane di una superficie algebrica completa dell'S_3, e della relativa curva jacobiana, in relazione con la rappresentazione degli ∞^5 E_1 dell'S_3 complesso con ∞^5 S_4 generatori di una varietà dell'S_{11}, e alla rappresentazione delle curve e superficie infinitesime. S'introduce il concetto di superficie semiriducibile.

Premessa. — Una curva completa, di ordine n e classe m, è rappresentata in S_5 da una V_3^{m+n}, costituita da ∞^1 piani generatori che risultano gli ∞^1 piani tangenti ad una rigata V_2^{2n}, nei punti di una curva c', direttrice della rigata, e rappresentante, con le sue generatrici, i punti della c^n data; i piani generatori della V_3^{n+m} rappresentano, invece, le coppie (P, t) della curva completa, o ciò che è lo stesso, gli ∞^1 E_1 della c^n, di centro P e tangente t.

Considerato nel piano S_2 di c^n un fascio di rette, resta determinato in S_5 un ipercono quadrico V_4^2 che seca sulla V_3^{n+m} una superficie rispondente alla g_n^1 secata sulla c^n dal fascio di rette. Questa superficie intersezione si spezza sempre in una parte *fissa*, indipendente dal fascio di rette considerato, di cui fa parte oltre un piano la rigata V_2^{2n} [rispondente ai punti degli ∞^1 gruppi G_n della serie g_n^1, e quindi ai punti della c_n], e in una parte *variabile*, col variare del fascio di rette e quindi della g_n^1, costituita da un gruppo di piani generatori della V_3^{n+m} e precisamente quelli rispondenti agli E_1 di c^n aventi il centro nei punti del gruppo jacobiano G_j della g_n^1, cioè nei punti di contatto delle $j = m$ tangenti alla c^n uscenti dal centro del fascio. Ciò mette in evidenza che *i punti del gruppo jacobiano* G_j, *a differenza dei punti dei gruppi* G_n *della* g_n^1, *non intervengono come punti della* c^n, *ma come* E_1 *della* c^n, perchè ad essi non corrispondono *rette* generatrici della V_2^{2n}, ma *piani* generatori della V_3^{n+m}.

Si noti esplicitamente che agli ∞^2 fasci di rette del piano S_2 rispondono in S_5 ∞^2 iperconi quadrici di un sistema lineare ∞^2 (V_4^2), e questo sistema lineare di ipersuperficie di V_5 seca sulla V_3^{n+m} un sistema lineare di superficie dalle quali, tolta la parte fissa di cui fa parte la V_2^{2n}, si ot-

tengono gli ∞^2 gruppi di $j = m$ piani *costituenti una serie lineare,* che viene a rappresentare la serie lineare degli ∞^2 gruppi jacobiani delle ∞^2 serie g_n^1 secate sulla c^n dagli ∞^2 fasci di rette di S_2.

Quanto è detto per le serie lineari secate su c^n dai fasci di rette è stato già trattato nel caso generale delle serie lineari secate sulla c^n da fasci di curve qualunque [1].

Passando dalle curve alle superficie si inizia con questa nota una analoga ricerca relativa alle curve jacobiane delle reti di curve secate su una data superficie F^n dell' S_3 dalle stelle di piani di S_3, considerando la superficie F^n *completa*, e quindi rappresentata in S_{11} da una V_8^η, di ordine $\eta = n + 2m + \mu$, essendo m la classe delle sezioni piane della F^n, e μ la classe della F^n. In particolare la V_8^η risulta di ordine massimo n^3 quando la F^n è priva di punti multipli. Tale V_8^η è, in ogni caso, determinata in S_{11} dalla superficie F^n considerata come insieme delle sue ∞^2 calotte piane, alle quali corrispondono ∞^2 S_6 generatori della V_8^η [2].

Ad una stella di piani completi risponde in S_{11} un S_2 — cono cubico V^3_{10}, che, al variare della stella in S_3, descrive un sistema lineare ∞^3 (V^3_{10}).

L' ipercono cubico V^3_{10}, rispondente alla stella di piani, seca la V_8^η rispondente alla F^n, in una V_7 rispondente alla serie lineare (c^n) della ∞^2 sezioni piane della F^n con i piani della stella. Ebbene vedremo che anche in questo caso *la* V_7 *sezione si spezza in una parte fissa, e in una parte variabile, che risulta determinata dalla curva jacobiana* C^j *della rete* (c^n).

Della parte fissa fa parte, oltre un S_7' contato $\mu = n(n-1)^2$ volte, una W_7^ρ, con $\rho = 5n^2 - 2n$. La parte variabile, determinata dalla curva C^j jacobiana, è una V_7^J con $J = n(n-1)(2n-1)$. In questo caso *la parte fissa* W_7^ρ *risulta determinata dalla superficie* F^n *come insieme dei suoi* ∞^3 E_1, (invece la V_8 che la contiene è determinata dalle ∞^2 calotte piane della F^n); *la parte variabile* V_7^J *è determinata dalle* ∞^1 *calotte piane della superficie con il centro posto in punto* P *variabile nella jacobiana* C^j *della rete,* risultando detta V_7^J costituita dagli ∞^1 S_6 generatori della V_8 determinati dai punti della curva jacobiana.

Il sistema lineare ∞^3 (V^3_{10}) determinato in S_{11} dalle ∞^3 stelle di piani, seca la V_8 in un sistema lineare di varietà a 7 dimensioni dalle quali, *tolta la parte fissa costituita dal suddetto* S_7' *e dalla* W_7^ρ, *si ottengono* ∞^3 *varietà* V_7^J *costituenti un sistema lineare che viene a rappresentare il*

[1]) N. SPAMPINATO. *Rappresentazione in* S_5 *di un fascio di curve e della serie lineare su una curva complessa prolungata nel campo biduale.* (La Ricerca. Anno VI, 1955).

[2]) N. SPAMPINATO. *La varietà dell'* S_{11} *determinata da una superficie algebrica.* (La Ricerca. Anno VI, 1955).

sistema lineare ∞^3 *di tutte le jacobiane* C *delle* ∞^3 *reti di sezioni piane della* F^n.

La parte fissa della intersezione del sistema (V^3_{10}) con la V_8^η, risulta secata sulla V_8^η dalla *varietà base* di questo sistema, varietà base che è una W_9^5 determinata in S_{11} dagli ∞^5 E_1 di S_3, varietà che risulta pure determinata dall' S_3 rigato; essa è precisamente costituita da ∞^5 S_4 e da ∞^4 S_5 rispondente agli E_1 e alle rette di S_3 rispettivamente.

Si noti che fra le curve, piane o gobbe, e superficie complete, si ha occasione di notare quelle *infinitesime* e quelle *semiriducibili*.

Nel caso generale, con la F^n *dotata di punti multipli, in numero finito, o dotata anche di curve multiple, i due interi* ρ *e* J *sono dati da :*

$$\rho = 3(n + 2m) + 2\mu - j(2n - 1)$$

$$J - j(2n - 1) ,$$

e l' intersezione della V_8^η *con l' ipercono cubico* V^3_{10}, *rispondente ad una stella di piani, è data da :*

$$V_7^{3\eta} = \mu S_7' + W_7^\rho + V_7^J$$

La parte fissa $\mu S_7' + W_7^\rho$, *al variare di* V^3_{10} *nel sistema lineare* (V^3_{10}), *è secata la* V_8^η *dalla varietà base* W_9^5 *di detto sistema.*

1. *La rappresentazione di un sistema lineare di superficie dell'* S_3 *complesso, di dimensione 2, con una ipersuperficie* V_{10}^{3n} *dell'* S_{11}.

Nell' $S_3(x_j)$ complesso consideriamo un sistema lineare, di dimensione 2, di superficie, di equazione:

$$F(x_j) = \lambda f(x_j) + \mu g(x_j) + \rho h(x_j) \tag{1}$$

con $f(x_j)$, $g(x_j)$ ed $h(x_j)$ forme, di grado n, linearmente indipendenti.

In corrispondenza ad una superficie del sistema, determinata [dalla terna (λ, μ, ρ) di parametri, definita a meno di un fattore non nullo], con l' equazione (1), consideriamo nell' S_{11} complesso, dove si assumono come coordinate omogenee le 12 variabili complesse:

$$(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_4, y_4, z_4) , \tag{2}$$

la V_8 rappresentata dal sistema:

$$(3) \qquad F(x_j) = 0\,, \quad \sum \frac{\partial F}{\partial x_j} y_j = 0\,, \quad \sum \frac{\partial F}{\partial x_j} z_j = 0\,,$$

che dà la rappresentazione complessa della superficie (1) prolungata nel campo triduale. La V_8 è di ordine n^3 se il sistema dato è privo di punti base multipli. Se il sistema ha dei punti base multipli, per ogni tale punto multiplo della superficie (1) dalla varietà rappresentata dal sistema (3) si stacca un S_8. La V_8^η residua risulta di ordine:

$$(4) \qquad \eta = n + 2m + \mu\,,$$

indicando con μ la classe della superficie (1) fissata nel sistema, e con m la classe di una sua generica sezione piana. La (4), se la superficie considerata è priva di punti multipli, dà il valore massimo n^3.

Tenendo conto della (1), che dà la prima delle tre equazioni del sistema (3), la seconda equazione di questo sistema dà:

$$(1') \qquad \lambda\left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_j} y_j\right) + \mu\left(\sum \frac{\partial g}{\partial x_j} y_j\right) + \rho\left(\sum \frac{\partial h}{\partial x_j}\right) = 0.$$

La terza equazione del sistema (3) da:

$$(1'') \qquad \lambda \sum \frac{\partial f}{\partial x_j} z_j\Big) + \mu\left(\sum \frac{\partial g}{\partial x_j} z_j\right) + \rho\left(\sum \frac{\partial h}{\partial x_j} z_j\right) - 0.$$

Eliminando i tre parametri λ, μ, ρ, che intervengono linearmente nel sistema delle tre equazioni (3), cioè delle tre equazioni (1), (1′), (1″), si ha l' equazione:

$$(5) \qquad G(x_j\, y_j\, z_j) = \begin{vmatrix} f(x_j) & g(x_j) & h(x_j) \\ \sum \frac{\partial f}{\partial x_j} y_j & \sum \frac{\partial g}{\partial x_j} y_j & \sum \frac{\partial h}{\partial x_j} y_j \\ \sum \frac{\partial f}{\partial x_j} z_j & \sum \frac{\partial g}{\partial x_j} z_j & \sum \frac{\partial h}{\partial x_j} z_j \end{vmatrix} = 0.$$

La G è una forma delle 12 variabili x_j, y_j, z_j, di grado $3n$, e quindi *la equazione* (5) *rappresenta nell'* S_{11} *una ipersuperficie* V_{10}^{3n}, *che può considerarsi determinata nell'* S_{11} *dal sistema lineare di superficie* (1) *dato nell'* S_3. Essa conterrà le ∞^2 varietà V_8 rispondenti alle ∞^2 superficie del sistema, e quindi dà una rappresentazione in S_{11} delle ∞^2 superficie stesse.

2. *Gli* S_6 *generatori della* V_{10}^{3n}.

Ciascuna delle ∞^2 varietà V_8, della V_{10}, rispondente ad una superficie del sistema (1), è costituita da ∞^2 S_6 generatori, si ha quindi:

I) *La* V_{10}^{3n} *di equazione* (5), *determinata dal sistema di superficie* (1) *dell'* $S_3(x_j)$ *nell'* S_{11}, *è costituita da* ∞^4 S_6 *generatori.*

Considerati in S_{11} l' $S_3'(y_j)$ di equazioni:

$$(6) \qquad x_j = z_j = 0 \,,$$

e l' $S_3''(z_j)$ di equazioni:

$$(7) \qquad x_j = z_j = 0 \,,$$

ed indicati con A, A', A″ i punti di $S_3(x_j)$, $S_3'(y_j)$, $S_3''(z_j)$ corrispondenti fra di loro nelle proiettività rappresentate dall' eguaglianza delle coordinate (x_j), (y_j), (z_j), assunte in tali tre spazi, gli ∞^2 S_6 generatori della V_8, determinata in S_{11} da una superficie s^n del sistema, si costruiscono congiungendo ogni punto semplice A di s^n con i piani tangenti, nei punti A' ed A″, alle superficie s' ed s'' corrispondenti di s^n nelle suddette proiettività. Nel caso che A sia un punto multiplo della s^n, appartiene alla V_8, di ordine n^3 determinata dalla s^n, tutto l' S_8 congiungente A con S_3' ed S_3''. In tal caso si considerano appartenenti alla V_8^{η} (e sarà $\eta < n^3$) gli S_6 generatori ciascuno dei quali sia posizione limite dell' S_6 generatore determinato da un punto semplice A di s^n al variare di A in un ramo di s^n avente per origine quel punto multiplo, facendo tendere A al punto origine. La posizione limite di un tale S_6 generatore sarà un S_6 dell' S_8 di $V_8^{n^3}$ congiungente il punto multiplo con S_3' ed S_3''.

La Varietà V_{10} di ordine $3n$ contiene tutta la V_8 di ordine n^3 determinata dalle ∞^2 superficie del sistema, e conseguentemente tutti gli S_6 generatori della V_8^{η} contenuta nella V_8, e coincidente con questa solo nel caso che la superficie sia priva di punti multipli.

Per un generico punto A di $S_3(x_j)$, e quindi non punto base del sistema di superficie, passano un fascio di superficie del sistema ∞^2 e per ciascuna superficie del fascio sarà A un punto semplice. I piani tangenti in A alle superficie del fascio costituiranno un fascio avente per asse una retta a passante per A. In corrispondenza si avranno in S_3' un punto A' ed una retta a' passante per A', e in S_3'' un punto A″ ed una retta a'' passante per A″. Se diciamo π il piano tangente in A ad una superficie del fascio, e π', π'' i piani corrispondenti in S_3' ed S_3''. l' S_6 generatore della V_8 rispondente a tale superficie, congiungente A, π e π', varierà, al variare della superficie nel fascio, nell' S_9 — AS_3' S_3'' nella stella di centro

$S_4 = Aa' a''$, dato che i due piani π' e π'' descriveranno in S_3' ed S_3'' i fasci proiettivi di assi a' ed a''. Nella stella di centro S_4 si avranno così ∞^1 S_6 generatori della V_{10}^{3n}, costituenti, in S_8, un ipercono quadrico di vertice $S_4 = Aa' A''$, infatti gli ∞^1 $S_6 = A\pi' \pi''$ suddetti si possono considerare ottenuti proiettando da $S_4 = Aa' a''$ le generatrici $g = r' r''$, con r' retta di S_3' sghemba con a', ed r'' retta di S_3'' sghemba con a'', ed indicando con R′ ed R″ i punti che secano in r' ed r'' i due piani π' e π'' dei due fasci proiettivi. Si ha perciò:

II) *Per un generico punto* A *di* $S_3(x_j)$ *passano* ∞^1 S_6 *generatori* $A\pi' \pi''$ *della* V_{10}^{3n}, *con* π' *e* π'' *variabili in due fasci, proiettivi fra di loro e al fascio di piani* π *tangenti in* A *al fascio di superficie del sistema* ∞^2 (1) *passanti per* A. *Tali* ∞^1 S_6 *generatori costituiscono, nell'*$S_8 = AS_3' S_3''$ *un ipercono quadrico avente per vertice l'* $S_4 = Aa' a''$, *essendo* a' *ed* a'' *gli assi dei fasci descritti dai due piani* π' *e* π''.

3. *La ipersuperficie cubica di* S_{11} *determinata da una stella di piani dell'* S_3.

Nel caso $n = 1$ la (1) rappresenta una stella di piani e la (5) dà l'equazione, di grado 3:

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} f(x_j) & g(x_j) & h(x_j) \\ f(y_j) & g(y_j) & h(y_j) \\ f(z_j) & g(z_j) & h(z_j) \end{vmatrix} = 0.$$

Sia $Q(c_j)$ il centro della stella di piani fissata in $S_3(x_j)$. Il piano $QQ' Q''$ di S_{11} risulta triplo per la ipersuperficie (8), perchè le coordinate (2) di un punto di un tale piano sono date da:

$$(9) \qquad x_j = \rho q_j\,, \qquad y_j = \sigma q_j\,, \qquad z_j = \lambda q_j$$

e quindi danno una soluzione di multiplicità 3 della (8), qualunque siano i tre numeri non tutti nulli, ρ, σ e λ.

La ipersuperficie V_{10}^3 di equazione (8) ammette come doppi i tre spazi $S_3(x_j)$, $S_3'(y_j)$ ed $S_3''(z_j)$ e come semplici i tre S_7 che si ottengono congiungendo a due a due tali tre spazi. Ciò deriva dalla equazione (8) che è di grado 1 rispetto a ciascuna delle tre quaterne di variabili x_i, y_i e z_i, invece è di grado 2 rispetto a ciascuna delle 8-ple di variabili (x_i, y_i), (x_j, z_j) e (y_j, z_j).

A ciascun piano π della stella di centro C fissata in $S_3(x_j)$, corrisponde nella V_{10}^3 un S_8, perchè in questo caso è $n^3 = 1$. Tale S_8 con-

giunge i tre piani π, π' e π'', e passa per il piano triplo della V_{10}^3 QQ′ Q″. La V_{10}^3 risulta pertanto costituita da ∞^2 S_8 generatori passanti per il suo piano triplo. Nell' $S_8 = A\pi\pi'\pi''$ si hanno ∞^2 degli ∞^4 S_6 generatori della V_{10}^3, e precisamente gli $S_6 = A\pi'\pi''$ al variare di A in π, perchè il piano tangente alla superficie di ordine 1 costituita dal piano π in ogni suo punto (semplice) A è il piano π stesso. Raccogliendo si ha:

I) *Nel caso $n = 1$ la V_{10}^{3n} determinata dal sistema lineare di superficie* (1) *è una ipersuperficie cubica con un piano triplo* QQ′ Q″, *costituita da ∞^2 S_8 generatori passanti per il piano triplo. Il punto* Q *è il centro della stella di piani* (1), *e gli ∞^2 S_8 generatori sono gli $S_8 = \pi\pi'\pi''$ con π variabile nella stella di piani data in $S_3(x_j)$. Un tale S_8 contiene ∞^2 degli ∞^4 S_6 generatori della V_{10}^3, e precisamente gli $S_6 = A\pi'\pi''$ al variare di* A *in* π.

II) *Per la V_{10}^3 sono doppi i tre spazi S_3, S_3' ed S_3'' e semplici i tre S_7 congiungenti a due a due tali tre spazi doppi.*

4. *I piani tripli della V_{10}^{3n} rispondenti ai punti base del sistema lineare di superficie che la determina in S_{11}.*

Sia $Q(q_j)$ un punto base del sistema (1), e sia Q semplice per la ipersuperficie generica F del sistema. Il piano π tangente ad F in Q, nel caso generico, descrive la stella di piani di centro Q al variare di F fra le ∞^2 superficie del sistema. In questo caso per Q passano perciò, ∞^2 S_6 generatori $Q\pi'\pi''$ costituenti tutto l' $S_8 = QS_3'S_3''$, che apparterrà alla V_{10}^{3n}. Si ha perciò:

In corrispondenza ad un punto base semplice Q *del sistema* (1), *si ha nella V_{10}^{3n} l' $S_8 = QS_3'S_3''$.*

Nel piano QQ′ Q″ consideriamo il punto R di coordinate

$$(10) \qquad x_j = aq_j\,, \qquad y_j = bq_j\,, \qquad z_j = cq_j$$

e siano

$$(11) \qquad x_j = aq_j + d_j\,\rho\,, \quad y_j = bq_j + l_j\,\rho\,, \quad z_j = cq_j + m_j\,\rho$$

le equazioni di una generica retta di S_{11} passante per il punto R di coordinate (10), rispondente al valore $\rho = 0$ del parametro ρ.

Sostituendo le (11) nell' equazione (5) della V_{10}^{3n} ogni elemento del determinante ottenuto dopo la sostituzione sarà un polinomio di grado n in ρ senza termine noto, perchè, essendo $Q(q_j)$ un punto base del sistema (1), per il valori (10) che danno i termini noti delle (11), si annullano le tre forme $f(x_j)$, $g(x)$ ed $h(x_j)$, e conseguentemente anche le altre sei

forme che insieme a queste costituiscono gli elementi del determinante $G(x_j\, y_j\, z_j)$. Segue che sviluppando il determinante dopo la sostituzione delle (11) nella (5), si ha un polinomio di grado $3n$ in ρ senza termini di grado 0,1 e 2. Si ha pertanto un'equazione in ρ che ammette la radice $\rho = 0$ almeno tripla, e tripla nel caso generico. Il punto Q che risponde al valore $\rho = 0$ è pertanto triplo per la V_{10}^{3n}. Essendo Q un generico punto del piano $QQ'Q''$, sarà questo piano triplo per la V_{10}^{3n}. Si ha perciò:

Se Q *è un punto base semplice del sistema lineare di superficie* (1), *il piano* $QQ'Q''$ *di* S_{11} *risulta un piano triplo della ipersuperficie* V_{10}^{3n} *di equazione* (5) *che il sistema determina in* S_{11}.

NOTA. — Nel caso $n = 1$ si ha la proprietà già notata per il centro Q della stella dei piani, ed il relativo piano $QQ'Q''$, che risulta un piano triplo per la V_{10}^{3}, risultando questa, di conseguenza, in ipercono col vertice nel piano $QQ'Q''$.

Nel caso generale il sistema lineare (1) ammette n^3 punti base semplici Q_i $(i = 1, 2, \ldots, n^3)$. Si avranno in corrispondenza in S_{11} n^3 piani $Q_i\, Q_i'\, Q_i''$ tripli per la V_{10}^{3n}.

Si noti che i piani del tipo $AA'A''$ dell'S_{11}, con A variabile in $S_3(x_j)$ a A', A'' punti di $S_3'(y_j)$ ed $S_3''(z_j)$ avente le stesse coordinate di A in $S_3(x_j)$, costituiscono gli ∞^3 piani di una varietà W_5^{10} di Segre dell'S_{11}, piani che considerati come elementi, costituiscono un S_3 proiettivo complesso, in corrispondenza proiettiva con il dato $S_3(x_j)$ su cui varia il punto A che determina il piano $AA'A''$.

5. *Gli* ∞^5 S_4 *di* S_{11} *rispondenti agli* ∞^5 E_1 *dell'* S_3.

Consideriamo in $S_3(x_j)$ un $E_1 = AA_1$ di centro A e di tangente $t = AA_1$ [cioè con A_1 punto infinitamente vicino ad A posto nella retta t della stella di centro A]. Siano t' e t'' le rette di S_3' ed S_3'' rispondenti alla retta t nelle proiettività, già considerate, rappresentate dall'eguaglianza delle coordinate di S_3 ed S_3' ed S_3''. Resta determinata in S_{11} l'$S_4 = At't''$, che diremo *immagine dell'* E_1 *fissato in* S_3. In corrispondenza agli ∞^5 E_1 di $S_3(x_j)$ avremo in S_{11} ∞^5 S_4, ciascuno appoggiato ad $S_3(x_j)$ in un punto A, e ad $S_3'(y_j)$ ed $S_3''(z_j)$ in due rette t' e t'' passanti rispettivamente per A' ed A''. Si noti che l'$S_4 = At'\,t''$ contiene il piano $AA'A''$ rispondente al punto A nella varietà di Segre W_5^{10} considerata nella nota precedente.

I due piani At' ed At'' descrivono, rispettivamente, nei due S_7 congiungenti S_3 con S_3' ed S_3'', due congruenze di ∞^5 piani, ciascuna delle quali rappresenta pure gli ∞^5 E_1 di S_3, e proiettive fra di loro. Gli ∞^5 $S_4 = At't''$ di S_{11} si ottengono congiungendo le ∞^5 coppie di piani At', At'' di tali

due congruenze, uscenti da uno stesso punto A di S_3 e rappresentanti uno stesso E_1 di S_3 in ciascuno dei due S_7 ambienti.

6. *Gli* ∞^5 *iperconi quadrici* V_5^2 *e la congruenza* (S_6) *degli* ∞^5 S_6 *ambienti, rispondenti alle* ∞^5 *calotte piane di* S_3.

Nell' S_2 (x_j) consideriamo una calotta piana di centro A e posta nel piano π, e quindi costituita dagli ∞^1 E_1 di centro A e di tangente t, variabile nel fascio di rette di centro A e di sostegno π. In corrispondenza a detti ∞^1 E_1 si avranno in S_{11} ∞^1 $S_4 = At' t''$ costituenti una varietà V_5 contenente il piano $AA' A''$ dato che t' descrive il fascio di centro A' posto nel piano π' e t'' descrive il fascio di centro A'' e posto nel piano π''. Tale V_5 è un ipercono quadrico di vertice $AA' A''$, nell' $S_6 = A\pi'\pi''$. Infatti considerata in π una retta r non passante per A e detto R il punto in cui t seca r, l' $S_4 = At' t''$ coincide con l' S_4 congiungente il piano $AA' A''$ con i due punti R' ed R'' dato che risulta $t' = A' R'$ e $t'' = A'' R''$. Al variare di t nel fascio di centro A nel piano π, i punti R' ed R'' descrivono le due rette r' ed r'' corrispondentisi in una proiettività e conseguentemente la retta $g = R' R''$ descrive una rigata quadrica dell' S_3 congiungente r' con r'', e l' $S_4 = AA' A'' R' R'' = AA' A'' g$ descrive l' ipercono quadrico W_5^2 che si ottiene proiettando dal piano $AA' A''$ la suddetta rigata quadrica. L' ambiente dell' ipercono W_5^2 è l' $S_6 = AA' A'' r' r''$ cioè l' $S_6 = A\pi'\pi''$, essendo $\pi' = A' r''$ e $\pi'' = A'' r''$.

L' ipercono W_5^2 *e l'* $S_6 = A\pi'\pi''$ *si diranno determinati in* S_{11} *dalla calotta piana di* S_3 (x_j) *di centro* A *e posta nel piano* π.

In corrispondenza alle ∞^5 *calotte piane di* S_3 *si avranno in* S_{11} ∞^5 V_5^2, *e* ∞^5 S_6 *loro ambienti.* Questi ∞^5 S_6 costituiscono in S_{11} una congruenza (S_6) che risulta di ordine 1 dato che per un generico punto P di S_{11} passa un solo S_6 della congruenza; infatti diciamo A il punto di S_3 che si ottiene proiettando P da l' S_7 congiungente S_3' ed S_3'', resta intanto determinato un piano $AA' A''$. Diciamo ora Q' la proiezione di P su S_3' dell' S_7 congiungente S_3 con S_3'', resta determinato il piano $QQ' Q''$. Diciamo infine R'' il punto di S_3'' proiezione di P dell' S_7 congiungente S_3 con S_3', e resta determinato il piano $RR' R''$. L' S_6 congiungente il punto A con i piani $A' Q' R'$ e $A'' Q'' R''$ che indicheremo con π' e π'', proiettivi al piano $\pi = AQR$, è l' unico S_6 del tipo $A\pi'\pi''$ che contiene il punto P fissato genericamente in S_{11}.

Si ha perciò:

I) *In corrispondenza alle* ∞^5 *calotte piane di* S_3 *si hanno in* S_{11} ∞^5 S_6 *costituenti una congruenza* (S_6) *di ordine* 1. *Alla calotta piana di centro* A, *posta nel piano* π, *risponde l'* S_6 $A\pi'\pi''$. *Gli* S_4 *rispondenti agli* ∞^1 E_1 *di tale calotta piana costituiscono, in detto* S_6, *un ipercono*

quadrico W_5^2 *avente per vertice il piano* AA′A″, *rispondente nella varietà di* SEGRE W_5^{10}, *al centro* A *della calotta.*

7. *La ipersuperficie* V_{10}^3 *composta con la congruenza* (S_6).

Nel n. 2 abbiamo osservato che sia la V_8 di ordine n^3, sia la V_{10}^{3n}, rispondenti ad una superficie e al sistema lineare di ∞^2 superficie di equazione (1) risultavano costituite da S_6 generatori del tipo $A\pi'\pi''$, con π piano di S_3 (x_i) passante per A, e quindi facente parte della congruenza (S_6) rappresentante gli ∞^5 calotte piane di S_3. Se A è un punto semplice della superficie il piano π è il piano tangente alla superficie in A, e quindi *si può considerare l'* $S_6 = A\pi'\pi''$ *come determinato in* S_{11} *dalla calotta piana della superficie col centro nel punto* A.

Se A è un punto multiplo della superficie tutti i piani π della stella di centro A contengono ∞^1 E_1 col centro in A e quindi, in tal caso, fa parte della V_8 di ordine n^3 determinata dalla superficie tutto l'S_8 costituito dagli ∞^2 $S_6 = A\pi'\pi''$, con π variabile nella stella di piani di centro A in S_3. In ogni caso la V_8 risulta composta con S_6 generatori facenti parte della congruenza (S_6). Si ha perciò:

I) *La* V_8 *di ordine* n^3 *determinata da una superficie di ordine* n *nell'* S_{11} *è composta con la congruenza* (S_6) [*e quindi è determinata dalla superficie in quanto insieme di calotte piane*].

Analogamente si ha:

II) *La* V_{10}^{3n} *determinata in* S_{11} *dal sistema lineare* ∞^2 *di superficie* (1) *è composta con la congruenza* (S_6) [*e quindi si può considerare determinata dalle* ∞^4 *calotte piane che costituiscono le* ∞^2 *superficie del sistema*].

8. *La congruenza* (S_8), *composta con la congruenza* (S_6), *determinata in* S_{11} *dagli* ∞^3 *piani di* S_3, *ciascuno considerato come sostegno di* ∞^2 *calotte piane.*

Considerato in S_3 (x_j) un piano π. Per ogni punto A di π resta determinata la calotta di centro A, posta nel piano π, a cui corrisponde, in S_{11}, l'$S_6 = A\pi'\pi''$ della congruenza (S_6). Variando A in π si avranno le ∞^2 calotte piane poste in π, e ∞^2 $S_6 = A\pi'\pi''$ che costituiranno l'S_8 congiungente i tre piani $\pi\pi'\pi''$. Si ha perciò:

I) *In corrispondenza ad un piano* π *di* S_3, *considerato come sostegno di* ∞^2 *calotte piane, resta determinato in* S_{11} *l'* $S_8 = \pi\pi'\pi''$, *composto con gli* ∞^2 S_6 *della congruenza* (S_6) *rispondenti a tali calotte piane.*

Variando il piano π fra gli ∞^3 piani di S_3, l' $S_8 = \pi\pi'\pi''$ descrive in S_{11} una congruenza (S_8) di ordine 1. Infatti se R è un generico punto di S_{11} restano determinati tre piani π, π', π'', corrispondenti nelle proiettività prefissate fra S_3, S_3' ed S_3'', che sono congiunti da un S_8 passante per R; essi sono i piani $\pi = ABC$, $\pi' = A'B'C'$ e $\pi'' = A''B''C''$ essendo A, B' e C'' i tre punti *determinati da* R in S_3, S_3' ed S_3'' proiettandolo in ciascuno di questi tre spazi dall' S_7 che congiunge gli altri due rimanenti. L' $S_8 = \pi\pi'\pi''$ è determinato, pertanto, da R, è perciò l' unico S_8 della congruenza (S_8) passante per R.

Si ha quindi:

II) *Gli* ∞^3 $S_8 = \pi\pi'\pi''$, *determinati dagli* ∞^3 *piani* π *di* S_3, *costituiscono in* S_{11} *una congruenza* (S_8), *di ordine* 1, *composta con la congruenza* (S_6) *degli* ∞^5 S_6 *determinati dalle* ∞^5 *calotte piane di* S_3.

Si noti che per il punto R passa un S_8 della stella di vertice $S_7' = S_3'S_3''$ che seca in S_3 il punto A. In tale $S_8 = AS_7'$ trovasi l' $S_6 = A'\pi\pi''$ che appartiene pure all' $S_8 = \pi\pi'\pi''$. Si ha perciò:

III) *L'* S_6 *della congruenza* (S_6) *passante per un punto* R *di* S_{11} *risulta intersezione dei due* S_8, *della stella di vertice* S_7' *e della congruenza* (S_8), *passanti per* R, *che risultano appartenenti ad uno stesso iperpiano* S_{10}.

Si noti che se l' S_6 suddetto è dato da $A\pi\pi'$, i due S_8 sono dati da AS_7' e $\pi\pi'\pi''$, e l' S_{10} che li congiunge è dato da $\pi S_7'$.

9. *Sugli* S_8 *generatori dell' ipercono* V_3^{10} *rispondente ad una stella di piani.*

Nel n. 3 abbiamo notato che la ipersuperficie V_3^{10}, rispondente ad una stella di piani di S_3 di centro Q, è costituita da ∞^2 $S_8 = \pi\pi'\pi''$ generatori, passanti per il piano $QQ'Q''$, determinati dagli ∞^2 piani π passanti per Q. Tali S_8 appartengono, pertanto, alla congruenza (S_8) costituita dagli ∞^3, perciò la ipersuperficie V_3^{10} è composta con la congruenza (S_8).

Per un punto P del piano $QQ'Q''$ [appartenente alla varietà di Segre W_5 di S_{11}, costituita dai piani del tipo $AA'A''$, notata nel n. 4], non passa perciò un solo S_8 della congruenza (S_8). ma infiniti; quindi tale punto è singolare per la congruenza (S_8), ed i piani della congruenza passanti per P sono ∞^2, e passano, di conseguenza, per tutti i punti del piano $QQ'Q''$ della varietà di Segre W_5 passante per P, e costituiscono l' ipercono V_3^{10}, di vertice $QQ'Q''$, rispondente alla stella di piani di centro Q. Si ha perciò:

I) *L' ipercono* V^3_{10} *rispondente alla stella di piani di vertice* Q, *è composto con gli* ∞^2 S_8 *generatori della congruenza* (S_8) *passanti per il*

piano QQ′Q″ *della varietà di* SEGRE W_5^{10}, *singolare per la congruenza* (S_8), *è costituente il piano triplo vertice dell' ipercono.*

II) *Un* $S_8 = \pi\pi'\pi''$ *della congruenza* (S_8) *appartiene ad* ∞^2 *iperconi* $V^3{}_0$, *quelli aventi per vertici gli* ∞^2 *piani* QQ′Q″, *con* Q *variabile nel piano* π [*degli* ∞^3 *piani generatori della varietà di* SEGRE W_5^{10}].

10. *Gli* ∞^4 S_5 *di* S_{11} *all'* S_3 *rigato completo.*

Fissata una retta t di S_3 agli ∞^1 E_1 di centro A, in t, e tangente t [costituenti la *retta t completa*, cioè la curva completa elementare del tipo $C^{1,0}$, di ordine 1 e classe zero], corrispondono in S_{11} gli ∞^1 $S_4 = At't''$, al variare di A in t, costituenti, perciò, l' $S_5 = tt't''$, e in esso il fascio di iperpiani passanti per l' $S_3' = t'\,t''$. In corrispondenza alle ∞^4 rette t dell' S_3 rigato avremo in S_{11} ∞^4 $S_5 = tt't''$. Questi saranno gli S_5 generatori di una *varietà* W_9, *di* S_{11} *che può considerarsi determinata in* S_{11} *dall'* S_3 *rigato completo*. La W_9 è costituita pure dagli ∞^5 S_4, considerati nel n. 5, rispondenti agli ∞^5 E_1 di S_3, distribuiti in ∞^4 fasci di S_4 appartenenti agli ∞^4 S_5 generatori.

Si noti che l' $S_5 = tt't''$ è l' ambiente della varietà di SEGRE W_3^3 costituita dagli ∞^1 piani AA′A″ al variare di A nella rettta t, e facente parte della varietà di SEGRE W_5^5 costituita dagli ∞^3 piani AA′A″, al variare di A in tutto l' S_3. Ne segue che questa varietà di SEGRE W_5^5 [notata nel n. 4 e nel n. 9], appartiene alla W_9 determinata dall' S_3 rigato completo, o dagli ∞^5 E_1 di S_3.

Variando una retta t in un fissato piano π, l' $S_5 = tt't''$ varia nell' $S_8 = \pi\pi'\pi''$ della congruenza (S_8). In questo S_8 gli ∞^2 $S_5 = tt't''$, rispondenti alla ∞^2 rette t di π, costituiranno una W_7, della W. Nella W_9 vi sono, pertanto, ∞^3 W_7 rispondenti agli ∞^3 piani π di S_3. Due di essi, rispondenti a due piani π e π_1, avranno in comune l' $S_5 = tt't''$, essendo t la retta intersezione dei due piani π e π_1.

Nell' $S_8 = \pi\pi'\pi''$ *la* W_7 *è un' ipersuperficie di ordine* 3. Infatti se diciamo P un punto di $S_8 = \pi\pi'\pi''$ ed A, B′, C″ le proiezioni di P su π, π' π'' dai tre S_5 $\pi''\pi'$, $\pi'\pi$, $\pi\pi''$ rispettivamente, la condizione perchè P appartenga ad un S_5 generatore della W_7, del tipo $S_5 = tt't''$ equivale alla condizione che i tre punti A, B, C appartengano ad una stessa retta t di π (e conseguentemente A′, B′, C′ apparterranno a t', e A″, B″, C″ apparterranno a t''). Supposto che nell' S_3 (x_j) si assuma π come piano di equazione $x_4 = 0$, sarà l' $S_8 = \pi\pi'\pi''$ rappresentato dalle tre equazioni:

$$(12) \qquad x_4 = 0\ , \qquad y_4 = 0\ , \qquad z_4 = 0$$

nelle coordinate (2). Assunte in $S_8 - \pi\pi'\pi''$ come coordinate le 9 variabili

$$(13) \qquad (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3)$$

la condizione perchè il punta P di coordinate (13) dia origine ai suddetti punti A, B, C, di π, allineati è espressa dall' equazione:

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

di grado 3 nelle coordinate (13). Pertanto la W_7 di S_8 è la ipersuperficie cubica di equazione (14). *Nell'* S_{11} *la* W_7^3 *è rappresentata dalle quattro equazioni* (12) e (14).

11. *Le* W_5 *di* S_{11} *rispondenti alle curve piane o gobbe complete di* S_3. *Curve infinitesime.*

Sia c^n una curva piana o gobba irriducibile *completa* di S_3, costituita perciò da ∞^1 $E_1 = AA_1$ di centro A e tangente $t = AA_1$, con A variabile in c^n e t tangente a c^n in A, se A è semplice per c, o una delle tangenti a c in A se A è multiplo per c^n. In corrispondenza a detti ∞^1 $E_1 = AA_1$ della curva completa c^n si avranno in S_{11} ∞^1 $S_4 = At't''$, costituenti una varietà W_5 che si dirà determinata in S_{11} dalla curva completa c^n.

Se è $n = 1$ la c^n è una retta t e gli ∞^1 $E_1 = AA_1$ hanno tutti la stessa tangente t. In tal caso la W_5 risulta di ordine 1, perchè è l' $S_5 = tt't''$ descritto dall' $S_4 = At't''$ al variare di A nella retta t.

Se è $n = 2$ la c^2 determina una W_5 che apparterrà all' $S_8 = \pi\pi'\pi''$ della congruenza (S_8), se si indica con π il piano di S_3 contenente la conica c^2.

Se è $n > 2$ occorre distinguere i due casi in cui c^n è piana o gobba. Nel primo caso, se π è il piano di c^n, la W_5 da essa determinata appartiene ad un S_8 di (S_8) e precisamente all' $S_8 = \pi\pi'\pi''$. Gli ∞^1 $S_4 = At't''$ della W_5 secheranno nell' $S_5' = \pi'\pi''$, dell' $S_7' = S_3' S_3''$, gli ∞^1 $S_3 = t't''$, congiungenti le coppie di rette tangenti a c' e c'', di π' e π'', nelle coppie di punti omologhi A′, A″ nella proiettività rappresentata dall' eguaglianza delle coordinate (y_j) e (z_j). Detti ∞^1 $S_3 = t't''$ costituiscono una ipersuperficie V_4' di S_5' che ammette come piani multipli, con la multiplicità m, indicando con m la classe della c^n, i due piani π' e π'', perchè per un generico punto di ciascuno di tali piani passano m S_4 generatori della W_5 e quindi m S_3 generatori di V_4'. Un S_3' di S_5' passante per π' e secante π'' in un punto, diciamo P″, seca la V_4' fuori del piano multiplo π',

in m piani $P'' t_i'$, se si indicano con t_i' le m rette di π' omologhe delle m tangenti t_i'' a c'' passanti per P''. La V_4' è pertanto di ordine $2m$. Ne segue che *la* W_5 *è di ordine* $n+2m$, perchè secata con un S_7, dell'$S_8 = \pi\pi'\pi''$ ambiente, passante per l'$S_5' = \pi'\pi'$ contenente la V_4' di ordine $2m$, si ottengono n $S_4 = A_j t_j' t_j''$ come ulteriore intersezione, e precisamente gli n S_4 generatori della W_5 contenenti gli n punti A_j in cui la c^n è secata dall' S_7.

Nel caso che la c^n sia gobba la W_5 non appartiene ad un S_8, come avviene nel caso della c^n piana, ma risulta però sempre di ordine $n+2m$. Infatti in questo caso gli ∞^1 $S_4 = At't''$ della W_5 secano in S_7' sempre ∞^1 $S_3 = t't''$, costituenti una V_4' che non è, come nel caso precedente, una ipersuperficie di un S_5', ma risulta sempre di ordine $2m$, dato che in S_3' ha una superficie V_2' di ordine m costituita dalle tangenti t' alla c' (di classe m come la c^n), e secando la V_4' con un S_4' passante per S_3' si ottengono, fuori della $V_2'^m$, m piani $P'' t_i'$ se diciamo t_i' le m rette di S_3' omologhe delle m rette t_i'' di S_3'' tangenti alla curva gobba c'' passanti per il punto P'' che l'S_4' considerato seca il S_3''. Secando ora la W_5 con un iperpiano S_{10} passante per l'S_7', ambiente della $V_4'^{2m}$, si ottengono, come ulteriore intersezione, gli n $S_4 = A_j t_j' t_j''$ generatori della W_5 uscenti dagli n punti A_j in cui la curva gobba c^n è secata dall'iperpiano S_{10} (ovvero dal piano che l' S_{10} seca in S_3). Si ha perciò:

I) *La* W_5 *di* S_{11} *determinata da una curva, piana o gobba, completa,* $C^{n,m}$ *di ordine* n *e classe* m, *costituita dagli* ∞^1 $S_4 = At't''$, *rispondenti agli* ∞^1 $E_1 = AA_1$ *della curva, di centro* A *e tangente* $t = AA_1$, *è di ordine* $n+2m$, *secata dall'*$S_7' = S_3' S_3''$ *in una* V_4' *di ordine* $2m$.

Nel caso $n = 1$, *è quindi* $m = 0$, *la* $C^{1,0}$ *è una retta* t, *la* W_5 *è lo* $S_5 = tt't''$ *ed è secato* dall' S_7' nell'$S_3 = t't''$. In questo caso si tratta di una *curva completa elementare del tipo* $C^{1,0}$, come caso particolare della curva completa piana $C^{n,m}$, di ordine n e classe m. Ma fra queste curve occorre considerare pure la *curva completa elementare dell' altro tipo* $C^{0,1}$ costituita dalle ∞^1 coppie punto-retta (A, t), con A fisso e t variabile in un fascio di centro A. In questo caso si hanno gli ∞^1 $E_1 = AA_1$ con il centro A fisso, e la tangente $t = AA_1$ variabile nel fascio di un piano π di centro A. Tali ∞^1 $E_1 = AA_1$ costituiscono, pertanto, *l' intorno del prim' ordine del punto* A *posto nel piano* π, considerato come *curva piana infinitesima*. In questo caso gli ∞^1 $S_4 = At't''$ costituiscono una W_5^2 dell'S_6 congiungente A con i due piani π' e π'', dato che tali ∞^1 $E_1 = AA_1$ costituiscono una calotta piana e quindi tali S_4 costituiscono l' ipercono quadrico considerato nel n. 6. *L' ordine di tale* W_5^2 *è sempre dato da* $n + 2m$, *come nel caso generale*, essendo la $C^{0,1}$ di ordine $n = 0$ e classe $m = 1$.

Consideriamo ora l' intorno del prim' ordine di un punto A posto in

un cono V_2^m, di vertice A, con $m > 1$, costituito dagli ∞^1 $E_1 = AA_1$, di centro A e di tangente t, variabile fra le generatrici del cono. Tale intorno costituisce una *curva infinitesima gobba* che considereremo pure come *curva completa gobba di ordine* 0 *e di classe* m, per mettere in evidenza che tali $E_1 = AA_1$ hanno i punti origini tutti coincidenti, e fissata una generica retta r dell'S_3 vi sono m di tali E_1 che hanno la tangente $t = AA_1$ appoggiata ad r (negli m punti in cui r seca il cono V^m). A tale curva completa, diciamo $C^{0,m}$, *gobba*, risponde pure una W_5 in S_{11}, costituita sempre dagli ∞^1 $S_4 = At't''$, di ordine $2m$; infatti se diciamo c^m una sezione piana del cono V_2^m di S_3 e T il punto comune a c^m e alla generatrice t del cono, e quindi $t = AT$, l'$S_4 = At't''$ è dato da $AA'A''T'T''$, e al variare della generatrice t descrive l'S_2-cono che si ottiene proiettando dal piano $AA'A''$ la rigata descritta dalla retta $g' = T'T''$, congiungente le coppie di punti T', T'' delle due curve piane c' e c'' di ordine m e corrispondentisi nella proiettività fra S_3' ed S_3''. Tale rigata è di ordine $2m$ e quindi è di ordine $2m$ la W_5; perciò anche questa curva infinitesima gobba, considerata come curva completa $C^{0,m}$, di ordine $n = 0$ e classe m, determina una W_5^{2m} il cui ordine $2m$ è dato sempre da $n + 2m$, come nel caso di una curva completa non infinitesima (piana o gobba). Raccogliendo si ha:

II) *Ad una curva completa, piana o gobba, anche infinitesima, di ordine n e classe m, con n ed m non entrambi nulli, costituita da ∞^1 $E_1 = AA_1$, di centro* A *e tangente $t = AA_1$, risponde nell'S_{11} una W_5, costituita da ∞^1 $S_4 = At't''$, di ordine $n + 2m$.*

Si noti che (per la proprietà I), si ha:

III) *Le ∞^3 W_5^{n+2m}, rispondenti alle sezioni piane della superficie* F, *secano sull'$S_7' = S_3'S_3''$ ∞^3 varietà V_4^{2m}, appartenenti agli ∞^3 $S_5' = \pi'\pi''$. Quella rispondente alla sezione fatta con un fissato piano π, generico, ha come V_4^{2m} di appoggio nell'$S_5' = \pi'\pi''$, la varietà costituita dagli ∞^1 $S_3' = t't''$ generatori, al variare di t fra le tangenti a detta sezione, completa $C^{n,m}$.*

Nel caso che il piano π sia tangente alla F, in un punto A, dalla V_4^{2m} si stacca l'S_1-cono quadrico V_4^2, costituito dagli ∞^1 $S_3' = r'r''$, con r variabile nel fascio di rette di centro A, posto nel piano π, contato 2 volte, se il piano tangente non è stazionario, contato 3 volte se è stazionario. Le relative varietà W_5^{n+2m-4} e W_5^{n+2m-6}, rispondenti a tali casi, si appoggiano, pertanto, ad S_7' con varietà V_4^{2m-4} e V_4^{2m-6} rispettivamente. Lo staccamento dell'S_1-cono V_4^2 su detto è conseguenza dello staccamento dalla sezione completa $C^{n,m}$ del caso generale, della curva completa elementare $C^{0,1}$, infinitesima, costituita dal fascio di rette di centro A posto

nel piano π, contato 2 o 3 volte secondo che A è per la sezione punto doppio nodale o cuspidale.

Si noti esplicitamente l' S_1-cono V_4^2 suddetto, determinato in $S_5' = \pi'\pi''$ dalla curva completa elementare infinitesima $C^{0,1}$ del piano π, si ottiene anche intersecando con S_5 l'S_2-cono V_5^2 di $S_6 = A\pi'\pi'' = A S_5'$, rispondente alla stessa curva completa elementare $C^{0,1}$, considerata come insieme degli ∞^1 E_1 di centro A posti nel piano π. L'S_6 ambiente, generatore della $V_8{}^n$, è da considerarsi, invece, determinato dalla calotta piana di centro A posta nel piano π.

12. *Le ∞^2 calotte piane con uno stesso centro considerate come calotte piane di una superficie infinitesima di S_3 e l' S_8 dell' S_{11} da questa determinato.*

Nel n. 7 abbiamo osservato che la V_8, di ordine n^3, determinata nell' S_{11} da una data superficie di ordine n dell' S_3 (x_j), può considerarsi determinata dalle ∞^2 calotte piane della superficie, alle quali corrispondono in S_{11} ∞^2 S_6, della congruenza (S_6), costituenti la V_8. L' S_6 rispondente alla calotta di centro A e di piano π è l' $S_6 = A\pi'\pi''$. Se la superficie è priva di punti multipli la V_8, di ordine n^3, risulta irriducibile. *Ogni* suo punto A è semplice ed è centro di una sola calotta della superficie [quella posta nel piano π tangente alla superficie in A], e quindi determina un solo S_6 generatore della V_8.

Se la superficie è dotata di punti multipli, ed A è uno di essi, tutto l'S_8 (A) congiungente A con l'$S_7' = S_3' S_3''$ appartiene alla V_8, che risulta pertanto riducibile. Tale S_8 (A) è costituito dagli ∞^2 $S_6 = A\pi'\pi''$, con π variabile nella stella di centro A, e quindi determinati dalle ∞^2 calotte con lo stesso centro A; calotte che devono considerarsi appartenenti alla superficie data essendo A un punto multiplo di essa. Tenendo conto che ciascuna di queste calotte di centro A e piano π costituisce nel piano π una *curva infinitesima*, anche l'insieme dèlle ∞^2 calotte di centro A è da considerarsi come una *superficie infinitesima*, che determina in S_{11} l'S_8 (A) della stella di centro S_7'.

I) *Alle ∞^3 superficie infinitesime di S_3 (rispondenti alle ∞^3 stelle di piani) corrisponderanno in S_{11} gli ∞^3 S_8 della stella di centro S_7'.*

L'ordine di una superficie infinitesima [come le curve infinitesime], si considera nullo. La classe è da considerarsi eguale ad 1, perchè se tale superficie infinitesima è costituita dalle calotte piane di centro A, di tali piani per una retta generica dello spazio S_3 ne passa uno solo.

Come rette tangenti alla suddetta superficie infinitesima si assumono le rette degli ∞^2 fasci aventi per centro A poste negli ∞^2 piani delle calotte, cioè nei piani della stella di centro A. Tali rette tangenti non sono

∞^3 come avviene per una superficie non infinitesima, ma ∞^2, essendo le rette della stella di centro A.

Una sezione piana della superficie infinitesima con un piano π passante per A è la curva infinitesima, di ordine O, e classe $1, C^{0,1}$, costituita dal fascio di rette di centro A e sostegno π. Se invece il piano π è un piano generico dell' S_3 esso non contiene alcuna retta tangente della data superficie infinitesima e quindi in questo caso la curva sezione non esiste. Pertanto come ordine e classe della *generica* sezione piana della superficie infinitesima si assume O. Con tali convenzioni l'ordine 1 della V_8 costituita dall' $S_8 - S_7 A$ rispondente alla superficie infinitesima risulta dato anche dalla formula generale (4) richiamata nel n. 1, essendo in questo caso $n = 0$, $m = 0$, $\mu = 1$.

Nei riguardi dell' ipercono V_{10}^3 rispondente ad una stella di piani di centro Q, considerato nel n. 3 e nel n. 9, si noti che:

II) *Gli* ∞^2 $S_8 = \pi\pi'\pi''$ *generatori di* V_{10}^3, *rispondenti agli* ∞^2 *piani* π *della stella di centro* Q, *contengono, rispettivamente, gli* ∞^2 $S_6 = Q\pi'\pi''$ *costituenti l'* $S_8(Q)$ *rispondente alla superficie infinitesima costituita dalle* ∞^2 *calotte piane di centro* Q, *e passante per il piano* $QQ'Q''$ *vertice dell' ipercono.*

13. *La* W_5 *di* S_{11} *determinata dalla curva completa intersezione di sue superficie complete.*

Siano date in S_3 due superficie complete determinate da due superficie luogo di ordini n ed n_1, irriducibili.

a) Se è $n = n_1 = 1$ si è nel caso di due piani completi π, π_1, ciascuno costituito da ∞^2 coppie punto-piano (A, π), (A_1, π). Supposti i piani distinti e detta r la retta intersezione di π con π_1, la retta completa costituita dalle ^{1} coppie punto-retta (R, r) con R variabile in r, costituisce l'intersezione dei due piani completi dati.

Alle ∞^2 coppie (A, π) rispondono in S_{11} gli ∞^2 $S_6 = A\pi'\pi''$ dell' $S_8 = \pi\pi'\pi''$ che rappresenta il piano completo π. Analogamente alle ∞^2 coppie (A_1, π_1) rispondono in S_{11} gli ∞^2 $S_6 = A_1\pi_1'\pi_1''$, dell' $S_8 = \pi_1\pi_1'\pi_1''$ che rappresenta in S_{11} il piano completo π_1. Se R e un punto della retta r intersezione di π e π_1 i due $S_6 = R\pi\pi'$ e $S_6 = R\pi_1'\pi_1''$ si secano nell'$S_4 = Rr'r''$. Questo S_4 al variare di R in r descrive l' $S_5 = rr'r''$ intersezione dei due S_8 che rappresentano i due piani completi. Sarà, pertanto, questo $S_5 = rr'r''$ che rappresenta in S_{11} la retta r completa intersezione dei due piani completi.

b) Consideriamo ora il caso di un piano π_1 completo e di una superficie F completa di ordine n, classe μ e con le sezioni piane di classe m,

Se (A, π) è una coppia punto-piano della F con A posto nel piano π_1, resta determinata in questo piano nel caso generico la coppia punto-retta (A, r) che, al variare di A fra i punti comuni a π e ad F, descriverà in π_1 la curva completa $C_1^{n,m}$, di ordine n e classe m, intersezione del piano completo π_1 con la superficie completa F. Fa eccezione il caso in cui il piano π della coppia (A, π) di F, coincida con il piano π_1, cioè *il caso in cui* π_1 *sia tangente alla* F *in* A, nel qual caso la coppia $(A, \pi) = (A, \pi_1)$ fa parte sia della superficie completa F, sia del piano completo π_1. Supposto A semplica per la F e detta c_1^n la curva luogo intersezione del piano π_1 con la superficie F, sarà A un punto doppio per la c_1^n, nodale o cuspidale, e quindi, in questo caso, farà parte della curva completa $C_1^{n,m}$ la curva completa elementare $C^{0,1}$, costituita dal fascio di rette di centro A nel piano π_1, contata 2 volte o 3 volte, restando una curva completa residua $C_1^{n,m-2}$ o $C_1^{n,m-3}$.

Diciamo V_8^{η} la varietà rispondente in S_{11} alla superficie completa F, sarà perciò $\eta = n + 2m + \mu$. Come seca la V_8^{η} l'$S_8 = \pi_1 \pi_1' \pi_1''$ rispondente al piano completo π_1?. Alla curva completa intersezione $C_1^{n,m}$ risponde in S_{11} una W_5^{n+2m}, che farà parte della varietà intersezione della V_8^{η} con l'S_8. Si osservi inoltre che essendo l'$S_7' = S_3' S_3''$ multiplo per la V_8^{η} con la multiplicità μ, l'$S_5' = \pi_1' \pi_1''$, che l'S_8 ha in detto S_7', farà parte della intersezione con la multiplicità μ. Sicchè *la* V_5^{η} *intersezione della* V_8^{η} *con l'* S_8 *risulta spezzata nella* W_5^{n+2m} *rispondente alla curva completa intersezione* $C_1^{n,m}$ *della* F *con* π_1, *e nell'* $S_5' = \pi_1' \pi_1''$, *contato* μ *volte, dell'* S_7' *multiplo della* V_8^{η}.

Resta a vedere che cosa si ha nel caso in cui il piano π_1 sia tangente alla F in un suo punto semplice A. In questo caso nell' $S_8 = A S_7'$ la V_8^{η} e l'$S_8 = \pi_1 \pi_1' \pi_1''$ hanno in comune l'$S_6 = A \pi_1' \pi_1''$, rispondente alla coppia punto piano (A, π_1) che fa parte della superficie completa F e del piano completo π_1, oltre la W_5^{n+2m} rispondente alla $C_1^{n,m}$; ma *in questo caso si ha lo spezzamento della* $C_1^{n,m}$, e conseguentemente della W_5^{n+2m}, e precisamente:

I) *Alla curva completa elementare* $C^{0,1}$ *costituita dal fascio di centro nel punto di contatto* A *del piano tangente* π_1 *risponde in* S_{11} *l'iperconо* W_5^2, *dell'* $S_6 = A \pi_1' \pi_1''$, *costituito dagli* ∞^1 $S_4 = A\, t'\, t''$, *al variare di* t *in detto fascio. Tale* W_5^2 *sarà parte della* W_5^{n+2m} *con la multiplicità 2 o 3, secondo che* A *per la* c_1^n *intersezione di* π_1 *con la* F *è doppio nodale o cuspidale.*

c Consideriamo ora il caso generale di due superficie F e F_1, di ordine n ed n_1, che si toccano semplicemente in d punti ed hanno k contatti stazionari, e quindi intersecatisi in una curva gobba completa C di ordine nn_1 e di classe

$$(15) \qquad r = nn_1 (n + n_1 - 2) - 2d - 3k.$$

Le due V_8 rispondenti in S_{11} alle due superficie avranno in comune [oltre l'S_7' che appartiene ad entrambe con multiplicità data rispettivamente dalle classi μ e μ_1 delle due superficie], la $W_5^{nn_1+2r}$ rispondente alla C, d iperconi V_5^2, ciascuno contato 2 volte, appartenenti ai d S_6 generatori comuni alle due V_8 uscenti dai d punti dove le superficie si toccano semplicemente ed, infine, k iperconi V_5^2, ciascuno contato tre volte, appartenenti ai k S_6 generatori comuni alle due V_8 uscenti dai k punti dove le due superficie hanno un contatto stazionario.

Nel caso $d = k = 0$, e quindi la C senza punti doppi, le due V_8, oltre l'S_7' con la multiplicità $\mu\mu_1$, avranno in comune, perciò, una V_5 di ordine:

$$(16) \qquad nn_1 + 2(n + n_1 - 2)\, nn_1 = nn_1 (2n + 2n_1 - 3).$$

Raccogliendo si ha:

II) *Le due varietà V_8 dell'S_{11} rispondenti a due superficie irriducibili complete F ed F_1, di ordini n ed n_1, e classi μ e μ_1, s' intersecano, oltre l'S_7' contato $\mu\mu_1$ volte in una W_5 di ordine $nn_1 (2n + 2n_1 - 3)$, che risponde alla curva completa intersezione delle due superficie, di ordine nn_1 e di classe $nn_1 (n + n_1 \quad 2)$, nel caso generico in cui le due superficie non si toccano in alcun punto.*

In corrispondenza ad ogni eventuale punto di contatto A semplice nelle due superficie dalla W_5 suddetta si stacca un ipercono W_5^2 contenuto nell' S_6 generatore comune alle due V_8 uscente da A, contato 2 volte o 3 volte secondo che si ha un contatto semplice o stazionario.

Si noti esplicitamente che se diciamo π il piano tangente comune nel punto semplice A alle due superficie F ed F_1, il suddetto ipercono è costituito dagli ∞^1 $S_4 = \mathbf{A}t' t''$ dell' $S_6 = \mathbf{A}\pi'\pi''$ rispondenti agli ∞^1 E_1, di centro A e tangente t al variare di t nel fascio di π di centro A, appartenenti ad entrambe le superficie, e quindi costituenti una *curva infinitesima facente parte della curva intersezione completa delle due superficie complete che ha in A un punto doppio*, a tangenti distinte o no secondo che si ha in A un contatto semplice o straordinario. *Il vertice di tale ipercono è il piano AA'A''*. Si noti che, come si è osservato nel caso *b*), *tutto l'S_6 ambiente dell' ipercono W_5^2 fa parte della intersezione delle due V_8, risultando un loro comune S_6 generatore: quello uscente dal punto A di contatto, delle due superficie, e quindi punto doppio della curva sezione.*

14. *Curve e superficie complete semiriducibili.*

Una curva algebrica irriducibile piana c^n priva di punti multipli determina una curva completa $C^{n,m}$ di ordine n e classe $m = n(n-1)$, costituita dalle ∞^1 coppie punto retta (A, t), con A in c^n e t tangente a c^n in A. Se diciamo π il piano di c^n nell' $S_5 = \pi\pi'$ la $C^{n,m}$ determina la V_3, di ordine n^2, costituita dai piani At', al variare di A in c^n e t' tangente a c' in A'. Se la c^n ha un punto multiplo Q, di multiplicità completa q, cioè abbassante la classe da $n(n-1)$ a $n(n-1) - q$, *la* V_3 *risulta riducibile* staccandosi da essa l' $S_3 = Q\pi'$ contato q volte, ambiente del fascio di piani Qt' al variare di t' nel fascio di centro Q', e quindi rispondenti alle ∞^1 coppie (Q, t) del fascio di centro Q nel piano π [fascio di rette che fa parte della curva $C^{n,n(n-1)}$ perchè in Q si annullano le derivate prime della forma che eguagliata a zero dà l'equazione della c^n nel piano π]. Della curva, in tal caso, *fa parte*, perciò, la *curva infinitesima* costituita dagli ∞^1 E_1 di centro Q del piano π. La curva irriducibile c^n la diremo in tal caso *semiriducibile per mettere in evidenza la riducibilità della* V_3 *come conseguenza della presenza nella* c^n *del punto multiplo* Q, *e l'appartenenza alla* c^n *della suddetta curva infinitesima.*

Consideriamo ora in S_3 una superficie F^n irriducibile e priva di punti multipli, e qnindi di classe $n(n-1)^2$. La V_8 ad essa corrispondente in S_{11} risulta di ordine massimo $\eta = n^3$, costituita dagli ∞^2 $S_6 = A\pi'\pi''$, rispondenti alle ∞^2 coppie punto-piano (A, π), con A in F^n e π piano tangente ad F^n in A. L' $S_7' = S_3' S_3''$ appartiene alla V_8 con la multiplicità $n(n-1)^2$. Se la F^n ha un punto multiplo Q, abbassante la classe di F^n di q unità, o. come diremo, di *multiplicità completa* q, dalla V_8 di ordine n^3, si stacca l' $S_8 = QS_7'$ contato q volte e si ha una V_8^η residua, di ordine $\eta = n^3 - q$, avente l' S_7' con la multiplicità $n(n-1)^2 - q$. L' $S_8 = QS_7'$ è l'ambiente della stella di ∞^2 $S_6 = Q\pi'\pi''$ con π variabile nella stella di piani di centro Q, e quindi rispondenti alle ∞^2 calotte piane di centro Q costituenti una *superficie infinitesima* facente parte della F^n che ha in Q un punto multiplo. In tal caso la F^n si dirà *semiriducibile per mettere in evidenza l'appartenenza ad essa della superficie infinitesima suddetta.*

Se la F^n, irriducibile, ha un numero finito di punti multipli $Q_1, \ldots, Q_s$, con le multiplicità complete $q_1, \ldots, q_s$, dalla V_8, di ordine n^3, si staccano gli s $S_8 = S_7'Q_{i, i=1,\ldots,s}$ conteti q_i volte, ma sempre in numero finito. Se invece la F^n contiene qualche curva multipla ad essa non risponde in S_{11} una varietà ad 8 dimensioni, dovendo contenere ogni V_9 che si ottiene proiettando da S_7' ciascuna di tali curve multiple. In questo caso la F^n contiene infinite superficie infinitesime, rispondenti ai suoi infiniti punti multipli, pur essendo irriducibile. Anche in questo caso la F^n si dirà *semiriducibile*, e quando si vuole distinguere dal caso precedente della F^n

con un numero finito di punti multipli, la diremo *semiriducibile di secondo grado*, indicando con *semiriducibilità di primo grado* quella del caso precedente, in cui la F^n determina in S_{11} una varietà ad 8 dimensioni, spezzata in un numero *finito* di $S_8 = S_7' Q_j$ e in una V_8^η con $\eta = n + 2m + \mu$. Nel caso della presenza di curve multiple per avere questa V_8^η determinata dalla F^n *occorre non considerare in* S_{11} *la* V_9 *rispondente a dette curve multiple* e gli S_8 rispondenti ai punti multipli isolati o facenti parte di curve multiple con multiplicità maggiore di quella del punto generico di una tale curva multipla. Si ricordi che, *in ogni caso*, la V_8^η è costituita dagli ∞^2 $S_6 = A\pi'\pi''$ con A punto semplice della F^n, π piano tangente ad F^n in A, considerando anche *le posizioni limiti* di un tale S_6 al tendere di un punto semplice A di F_n ad un punto multiplo di F^n lungo un ramo che abbia come origine tale punto multiplo. Un tale S_6 al limite apparterrà all' S_8 che congiunge il detto punto multiplo con S_7'.

NOTA. — In ciascuno degli ∞^2 $S_6 = A\pi'\pi''$ generatori della V_8 di ordine n^3 e della V_8^η, con $\eta \leqq n^3$, determinate dalla F^n in S_{11} vi sono gli ∞^1 $S_4 = Al'l''$ rispondenti agli ∞^1 E_1 di centro A e tangente t, con A in F^n e t variabile nel fascio di centro A posto in un piano π, qualunque se A è multiplo per la F^n, coincidente col piano tangente alla F^n in A se A è semplice per la F^n. Tali ∞^1 $S_4 = At't''$ costituiscono l' ipercono W_3^2 che risponde alla curva infinitesima costituita da tali ∞^1 E_1 di centro A.

Nel caso $n = 1$ la V_8 è un $S_8 = \pi\pi'\pi''$ della congruenza (S_3) indicando con π il piano F^1. *In corrispondenza agli* ∞^2 *punti* A *di* π, *e quindi alle* ∞^2 *curve infinitesime di* π, *si avranno, in* S_8, ∞^2 *iperconi* W_5^2 *contenuti nella* W_7^3 [*della* W (n. 10), *rispondenti agli* ∞^3 E_1 *del piano* π.

Nel caso $n > 1$, agli ∞^3 E_1 della F^n risponderanno ∞^3 $S_4 = At't''$ distribuiti negli ∞^n iperconi W_5^2 determinati dalle ∞^2 curve infinitesime della F^n, contenuti negli ∞^2 S_6 generatori della V_8^η, *costituenti una varietà* W_7^ρ (che dà la W_7^3 su considerata nel caso $n = 1$), *subordinata della* W.

E' bene ora notare che la W_5 intersezione delle due V_8 rispondenti a due superficie complete, studiata nel n. 13, è costituita dagli ∞^1 S_4 rispondenti agli ∞^1 E_1 comuni alle due superficie, quindi *queste due superficie, nella determinazione della* W_5 *rispondente alla loro curva intersezione, intervengono come insiemi di* E_1, e quindi *per ciascuna di esse interviene la* W_7^ρ *determinata dai suoi* ∞^3 E_1, *più che la* V_8^η *determinata dalle sue* ∞^2 *calotte piane, e contenente la* W_7^ρ.

Ritornando al caso $n = 1$ si noti che secando l' S_8 rispondente al piano π con la V''_{10} rispondente ad una stella di piani col centro Q fuori di π, si avrà una ipersuperficie di S_8 che deve rispondere alle ∞^2 rette che la stella di piani seca in π, *ciascuna considerata come insieme di* E_1,

e quindi tale sezione sarà la W_7^3 *che risponde agli* ∞^3 E_1 *di* π. Considerando ogni piano della stella come insieme dei suoi ∞^3 E_1, si avranno tutti gli ∞^5 E_1 dell' S_3, conseguentemente *la* W_9 *costituita dagli* ∞^5 S_4 *di* S_{11} *rispondenti a detti* ∞^5 E_1, *è contenuta nella ipersuperficie* V^3_{10} ***rispondente alla stella di piani***, e la W_7^3 che la V^3_{10} seca in S_8, si può considerare secata in S_8 dalla W_9, anzicchè dalla V^3_{10}. Variando la stella di piani varierà la V^3_{10}, ma queste ipersuperficie contengono tutte le W_9 e quindi secano nell' S_8 la stessa W_7^3, rappresentante gli ∞^3 E_1 di π.

E' bene mettere in evidenza per via analitica che la $\bar{W}_9$ è la varietà base del sistema lineare ∞^3 delle ipersuperficie V^3 rispondenti alle ∞^3 stelle di piani di S_3. Tale argomento sarà trattato nel n. seguente.

15. *La varietà base del sistema lineare delle ipersuperficie cubiche di* S_{11} ***rispondenti alle*** ∞^4 ***stelle di piani di*** S_3.

Nell' equazione (8) della ipersuperficie V^3_{10}, rispondente ad una stella di piani, le tre forme $f(x_j)$, $g(x_j)$ e $h(x_j)$ sono le forme lineari che eguagliate a zero rappresentano i tre piani che determinano la stella data. Posto esplicitamente:

$$(17)\qquad \begin{cases} f(x_j) = a_1 x_1 + \ldots + a_4 x_4 \\ g(x_j) = b_1 x_1 + \ldots + b_4 x_4 \\ h(x_j) = c_1 x_1 + \ldots + c_4 y_4 \end{cases}$$

si ricava che il determinante a primo membro della (8) risulta una combinazione lineare dei quattro determinanti:

$$(18)\qquad D_1 = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$(19)\qquad D_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$(20)\qquad D_3 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$(21) \qquad D_4 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Si ha perciò:

I) *Le equazioni delle ipersuperficie* V^3_{10} *di* S_{11}, *rispondenti alle* ∞^3 *stelle di piani di* S_3 (x_i), *sono combinazioni lineari delle quattro equazioni:*

$$(22) \qquad D_1 = O\,, \quad D^2 = O\,, \quad D_3 = O\,, \quad D_4 = O\,,$$

con i determinanti D_j *dati dalle* (18), . . , (21), *rappresentanti le quattro particolari ipersuperficie cubiche di* S_{11} *rispondenti alle quattro particolari stelle di piani aventi per centri i quattro punti fondamentali delle coordinate* A_1 (1, 0, 0, 0), . . , A_4 (0, 0, 0, 1) *rispettivamente.*

Osserviamo ora che affinchè un punto P di S_{11} appartenga alla varietà W_9 costituita dagli ∞^4 $S_5 = tt'\,t''$ al variare della retta t nell' S_3 rigato, detti A, B', C'' le proiezioni di P su S_3, S_3' ed S_3'', rispettivamente dai tre S_7 congiungenti i due rimanenti spazi, devono risultare appartenenti ad una stessa retta t i tre punti A, B, C (e conseguentemente apparterranno a t' i tre punti A' B', C' e a t'' i tre punti A'', B'', C''). Tale condizione porta che deve essere < 3 la caratteristica della matrice:

$$(23) \qquad \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{Vmatrix}$$

le cui righe sono costituite dalle coordinate dei tre punti A, B e C di S_3, supposto che il punto P di S_{11} abbia le coordinate (2); tale condizione equivale perciò, che siano nulli i quattro determinanti D_1, . . . , D_4, ovvero che il punto P appartenga alla varietà di equazioni (22), varietà base del sistema lineare ∞^3 delle ipersuperficie V^3_{10}. E viceversa. Si ha perciò:

II) *La varietà* W_9 *dell'* S_{11} *costituita dagli* ∞^4 $S_5 = tt'\,t''$ *al variare di t nell-* S_3 *rigato, è la varietà* [*di equazioni* (22)], *base del sistema lineare* ∞^3 *delle ipersuperficie cubiche di* S_{11}, *rispondenti alle* ∞^3 *stelle di piani di* S_3.

Si ricordi che:

III) *Se la retta t descrive un piano* π *di* S_3, *l'*$S_5 = tt'\,t''$ *descrive, nell'*$S_8 = \pi\pi'\,\pi''$, *la* $W_7{}^3$ *costituita dagli* ∞^3 $S_4 = At'\,t''$, *rispondenti agli* ∞^3

E_1 *di* π *di centro* A *e tangente* t, *e contenuta nella* W_9 *rispondente agli* ∞^5 E_1 *di* S_3.

16. *Rappresentazione in* S_{11} *di una rete di sezioni piane complete di una superficie completa e della relativa curva jacobiana.*

Sia data in S_3 una superficie F^n, con $n > 1$, ed una stella di piani col centro Q fuori di F^n.

a) Consideriamo in primo luogo *il caso* $n = 2$ *e la quadrica* F^2 *non cono.* La stella di piani di centro Q seca sulla F^2 una rete di coniche (c^2). Le coniche di (c^2) passanti per un punto generico P di F^2 sono secate dal fascio di piani di asse QP, nessuno dei quali è tangente alla F^2, e quindi nessuna di tali coniche ha un punto doppio in P e le loro tangenti costituiranno il fascio di centro P posto nel piano π tangente alla F^2 in P. Nel caso particolare che nel fascio di piani di asse PQ vi sia il piano π tangente ad F^n in P, il punto P appartiene alla conica C^2 sezione di F^2 con il piano polare di Q rispetto alla F^2, la retta $t = QP$ risulta tangente ad F^n in P e *tutte le coniche della rete* (c^2) *passanti per* P *hanno in* P *la stessa tangente* t, e fra queste ve n'è una spezzata $t + r$ secata su F^2 dal piano tangente π.

La conica C^2 *costituisce la jacobiana della rete di coniche* (c^2) *della* F^n, ed i piani tangenti alla F^2 negli ∞^1 punti di C^2 sono tutti e soli i piani della stella di centro Q che risultano tangenti la F^2.

Ciò premesso, consideriamo in S_{11} la $V_8{}^8$ rispondente alla quadrica completa F^2, costituita dagli ∞^2 $S_6 = P\pi'\pi''$ determinati dalle coppie (P, π) della superficie completa, e l'ipercono $V^3{}_{10}$ determinato dalla stella di piani di centro Q. La $V_7{}^{24}$ intersezione della $V_8{}^8$ con l'ipercono $V^3{}_{10}$ deve essere legata alla rete di coniche (c^2) intersezione della F^2 con la stella di piani di centro Q. Intanto osserviamo che essendo la F^2 di classe $\mu = 2$ l' S_7' apparterrà con la multiplicità 2 alla $V_8{}^8$. Ricordando che l'S_7' appartiene semplicemente all'ipercono $V^3{}_{10}$ (n. 3) si ha che l'S_7' farà parte della $V_7{}^{24}$ intersezione suddetta come doppio. La $V_7{}^{22}$ residua si dovrà spezzare nella $W_7{}^{\rho}$ costituita dalle ∞^2 $V_5{}^6$ rispondenti alle ∞^2 coniche della rete (c^2) (per $n = 2$, $m = 2$ è $n + 2m = 6$, n. 13 caso *b*)) e nella $V_7{}^J$ costituita dagli ∞^1 $S_6 = P\pi'\pi''$ con P variabile nella conica jacobiana C^2 della rete, perchè in ogni tal caso la coppia punto piano (P, π) fa parte sia della F^2 completa, sia del piano π completo, facente parte della stella di centro Q, e quindi un tale $S_6 = P\pi'\pi''$ deve parte sia della $V_8{}^8$, sia della $V^3{}_{10}$.

Dovrà essere perciò:

$$V_7{}^{24} = 2S_7' + W_7{}^{\rho} + V_7{}^J \qquad (24)$$

e quindi $\rho = 22 - J$.

Per calcolare l' ordine J della V_7^J, costituita dagli ∞^1 $S_6 = P\pi'\pi''$ con P variabile in C^2 e π tangente ad F^2 in P, si osservi che gli ∞ $S_5' = \pi'\pi''$ costituiscono in S_7' una V_6', intersezione della V_7^J con S_7'. Tale V_6' risulta di ordine 4. Infatti gli ∞^1 piani π' dànno l' S_3' che appartiene alla V_6 contato due volte dato che di tali piani π' per un punto generico di S_3, ne passano 2, quelli uscenti dai due punti intersezione di C' con il piano polare rispetto alla quadrica F' di tale punto. Secando ora la V_6' con un S_4 di S_7' passante per l' S_3', detto P'' il punto in cui tale S_4 seca S_3'' e detti π_1'' e π_2'' i piani tangenti ad F'' uscenti da P'' con i punti di contatto appartenenti alla C'', i due S_6 $\pi_1'\pi_1''$ e $\pi_2'\pi_2''$ secano tale S_4 nei due S_3 $P''\pi_1'$ e $P''\pi_2'$ che costituiranno l' intersezione della V_6' con l' S_4 fuori dell' S_3' doppio. La V_6' è pertanto di ordine 4. Ne segue che la V_7^J è di ordine J = 6, dato che un S_{10} passante per S_7' la seca, oltre la V_6' di ordine 4, in due S_6, $P_1\pi_1'\pi_1''$ e $P_2\pi_2'\pi_2''$, generatori, se diciamo P_1 e P_2 i due punti in cui la C^2 è secata dall' S_{10}.

Essendo J = 6 risulta $\rho = 22 - 6 = 16$. Abbiamo perciò:

I) *Alla rete* (c^2), *e alla sua jacobiana* C^2, *secata sulla quadrica con cono* F^2 *dalla stella di piani di centro* Q *fuori di* F^2, *rispondono in* S_{11} *una* W_7^{16} *e una* V_7^6 *che, insieme all'* S_7' *contato due volte, costituiscono la* V_7^{24} *intersezione della* V_8^8, *rispondente alla quadrica* F^2, *con l' ipercono* V^3_{10}, *rispondente alla stella di piani.*

Si noti esplicitamente che la W_7^{16}, rispondente alla rete (c^2), sarà costituita dalle ∞^2 W_5^6 che rispondono alle coniche della rete, ciascuna considerata come insieme di ∞^1 E_1, e quindi: *la* W_7^{16} *risulta costituita dagli* ∞^3 $S_4 = At'\,t''$ *generatori rispondenti agli* ∞^3 E_1 *della* F^2, *di centro* A *e tangente t.*

Facendo variare la stella di piani che seca la rete (c^2), e quindi questa rete (c^2) *la* W_7^{16} *non varierà, perchè determinata dagli* E_1 *della* F^2; varierà invece la V_7^6 rispondente alla jacobiana C^2 della rete [che varia al variare della rete]. Dentro la W_7^{16} varieranno, invece, le ∞^2 W_5^6 rispondenti alle c^2 della rete (c^2).

b) Consideriamo ora il *caso n qualunque, e la* F^n *priva di punti multipli.*

In questo caso alla F^n risponde una $V_8^{n^3}$ di ordine n^3. Alla rete di curve (c^n) che la stella di piani di centro Q, fuori di F^n, seca su F^n risponde una W_7^ρ; alla jacobiana C' della rete (c^n) risponde una V_7^J; l' S_7' appartiene alla V_8 con multiplicità $\mu = n(n-1)$, classe della F^n, e quindi farà parte della $V_7^{3n^3}$ intersezione della $V_8^{n^3}$ con l' ipercono V^3_{10} rispondente alla stella di piani, che ammette l' S_7' come semplice. In questo caso, per ciò, si avrà:

$$V_7^{3n^3} = \mu S_7' + W_7^\rho + V_7^J, \tag{25}$$

che estende la (24) nel caso $n = 2$.

Per ogni $S_6 = A\pi'\pi''$ generatore della $V_8^{n^3}$ si ha un ipercono V_5^2 della W_7^ρ, costituito da ∞^1 $S_4 = At't''$ al variare di t nel fascio di rette tangenti alla F^n nel punto A. Anche in questo caso, al variare di Q, centro della stella di piani e quindi la rete (c^n) secata su F^n, delle due varietà W_7^ρ e V_7^J varia solo la V_7^J. Dalla (25) segue la relazione:

$$3n^3 = n(n-1)^2 + \rho + J. \tag{26}$$

Determiniamo ora l'ordine J della V_7^J costituita dagli ∞^1 $S_6 = A\pi'\pi''$ generatori della V_8 uscenti dagli ∞^1 punti A della jacobiana C^j della rete (c^n). La V_7^J, è secata con un S_{10} passante per S_7', fuori di S_7', in j S_6 generatori della V_8: quelli uscenti dai punti intersezione della C^j con il piano che l'S_{10} seca nell'$S_3(x_i)$ ambiente della F^n, e quindi della C^j. Inoltre la V_7^J ha in S_7' la V_6' costituita dagli ∞^1 $S_5 = \pi'\pi''$ secati in S_7' dai suoi S_6 generatori. Tale V_6' ammette, con la multiplicità $j(n-1)$, i due spazi S_3' ed S_3'' descritti dai piani π' e π'', perchè per un generico punto, per es., di S_3', passa $j(n-1)$ piani che toccano la F' in punti della C'. La V_6' risulta di ordine $2j(n-1)$, perchè secata con un S_4' dell'S_7' ambiente passante, per es. per S_2', si ottengono come ulteriori intersezioni dentro l'S_4', $j(n-1)$ $S_3'^{(s)}$ $\left(s = 1, \ldots j(n-1)\right)$ dati da $A_s'' S_3''$, indicando con A_s'' i punti della C'' per i quali passano gli $j(n-1)$ piani tangenti alla F'' appartenenti alla stella di centro P'' intersezione di S_3'' con l'S_4' considerato. Si ha perciò che la V_7^J è secata dall'S_{10} nella V_6' di S_7' di ordine $2j(n-1)$, e in j S_6. Si ha perciò:

$$J = 2j(n-1) + j = j(2n-1). \tag{27}$$

Essendo la F^n priva di punti multipli la jacobiana C^j della rete (c^n) è di ordine $j = n(n-1)(2n-1)$, e quindi risulta, per la (27),

$$J = n(n-1)(2n-1). \tag{28}$$

Sostituendo il valore J, dato dalla (28), nella (26), si ricava ρ dato da

$$\rho = 3n^3 - n(n-1)^2 - n(n-1)(2n-1) = 5n^2 - 2n. \tag{29}$$

Si ha perciò, come estensione della proprietà I):

II) *Nella $V_8^{n^3}$, determinata in S_{11} da una superficie F^n dell'S_3, priva di punti multipli, la rete (c^n), e la sua jacobiana $C^{n\,n\,1}$, determinate sulla F^n da una stella di piani di centro Q fuori di F^n; determinano due varietà W_7^ρ e V_7^J di ordini:*

$$\rho = 5n^2 - 2n\,, \qquad J = n(n-1)(2n-1)\,,$$

che insieme all' S_7' *contato* $n(n-1)^2$ *volte* (classe di F^n), *costituiscono la* $V_7^{3n^3}$ *intersezione della* $V_8^{n^3}$ *con l'ipercono* V^3_{10} *rispondente in* S_{11} *alla stella di piani di centro* Q.

La V_7^J *è costituita dagli* ∞^1 $S_6 = A\pi'\pi''$, *fra gli* ∞^2 S_6 *generatori della* $V_8^{n^3}$, *rispondenti alle* ∞^1 *calotte piane della* F^n *col centro* A *nei punti della jacobiana* $C^{n(n-1)}$ *della rete* (c^n).

La W_7^ρ *è costituita dagli* ∞^3 $S_4 = At't''$ *rispondenti agli* ∞^3 E_1 *della* F^n *di centro* A *e tangente* t.

Delle due varietà W_7^ρ *e* V_7^J *varia, al variare della stella di piani, solo la seconda.*

Segue che:

III) *Il sistema lineare* ∞^3 (V^3_{10}) *di iperconi cubici di* S_{11}, *rispondente al sistema delle* ∞^3 *stelle di piani di* S_3, *seca sulla* $V_8^{n^3}$, *fuori di* S_7' *e della* V_7^ρ, *il sistema lineare* (V_7^J) *rispondente alle* ∞^3 *curve jacobiane* $C^{n(n-1)}$ *delle* ∞^3 *reti* (c^n) *contenute nel sistema lineare* ∞^3 *di tutte le sezioni piane della* F^n. (Ciò mette in evidenza che due qualunque di tali curve jacobiane sono *equivalenti*).

Si noti che:

La W_7^ρ *e l'*S_7' *risulteranno secati sulla* $O_8^{n^3}$ *dalla varietà base* $\overline{W}_9$ *del sistema lineare* (V^3_{10}) [costituita da tutti gli ∞^5 $S_4 = At't''$ rispondenti a tutti gli ∞^5 E_1 di $S_3(x_j)$, di centro **A** e tangente t].

Nel caso che la F^n sia dotata di punti multipli, intersecando le V_8^η con l'ipercono cubico V^3_{10} rispondente ad una stella di piani si avrà una $V_7^{3\eta}$ spezzata nell' S_7' contato μ volte, nella W_7^ρ e nella V_7^J, come nel caso precedente, ma in questo caso si ha, anzicchè la (26) la relazione

$$3\eta = \mu + \rho + J \tag{30}$$

con J dato dalla (27) essendo j l'ordine della jacobiana C^j della rete di curve (c^n) secata sulla F^n dalla stella di piani, escludendo le eventuali curve multiple della F^n (che fanno parte fissa delle jacobiane di tutte le reti (c^n)). Essendo $\eta = n + 2m + \mu$, la (30) in questo caso generale da

$$3(n + 2m + \mu) = \mu + \rho + j(2n - 1). \tag{31}$$

Segue che:

IV) *La* W_7^ρ *di* S_{11}, *costituita dagli* ∞^3 $S_4 = At't''$ *determinati dagli* ∞^3 E_1 *di* F^n, *di centro* A *e tangente* t, *contenuta nella* V_8^η *costituita dagli* ∞^2 $S_6 = A\pi'\pi''$ *determinati dalle* ∞^2 *calotte piane della* F^n, *di centro* A *e piano* π, *ha l'ordine* ρ *dato, in funzione dei caratteri* n,

m e μ della F^n e dell' ordine j della detta jacobiana C^j, dalla relazione :

$$(32) \qquad \rho = 3\,(n + 2m) + 2\mu \quad j\,(2n - 1).$$

La W_7^ρ, insieme all' S_7' contato μ volte, costituisce la parte fissa della V_7^η intersezione della V_8^η con l' iperc ono $V^3{}_{10}$ variabile nel sistema lineare ∞^3 ($V^3{}_{10}$) rispondente alle ∞^3 stelle di piani. La parte variabile di detta intersezione $V_7^{3\eta}$ è costituita dalla V_7^J, con $J = j\,(2n - 1)$, determinata dalla jacobiana C^j della rete c^5), e risponde al sistema lineare ∞^3 (C^j) delle C^j.

La varietà $W_7^\eta + \mu S_7'$, parte fissa della intersezione, è secata nella V_8^η dalla varietà base W_9 del sistema lineare ∞^3 ($V^3{}_{10}$).

Quest' ultima proprietà mette in evidenza la W_9, determinata nell' S_{11} dall' $S_3\,(x_j)$, considerato come insieme dei suoi ∞^5 E_1, è costituita pure dagli ∞^4 $S_5 = tt't''$, ciascuno dei quali è l' ambiente di un fascio di $S_4 = At'\,t''$, con A variabile nella retta t fissata nell' S_3 rigato. Nel n. seguente determineremo l' ordine della W_9 a cui appartengono tutte le W_7^ρ rispondenti a tutte le superficie di S_3, ciascuna considerata, anzicchè come insieme delle sue calotte piane, come insieme dei suoi ∞^3 E_1, e contenuta nella V_8^η rispondente alla stessa superficie considerata *completa*, cioè come insieme delle sue calotte piane.

17. *Ordine della $\overline{W}_9$ di S_{11} rispondente all' S_3 rigato.*

Gli ∞^4 $S_5 = tt'\,t''$ di S_{11}, rispondenti alle ∞^4 rette t dell' S_3 rigato, costituenti la W_9, secano in S_7' gli ∞^4 $S_3 = t'\,t''$ e di questi per un generico punto R di S_7' ne passa uno solo, e precisamente, se indichiamo con P′ e Q″ le proiezioni da S_3'' e da S_3' di R su S_3' ed S_3'', rispettivamente, per R passa l' $S_3 = t'\,t''$ con $t' = P'\,Q'$ e $t'' = P''\,Q''$. Sicchè l' S_7' appartiene, come semplice, alla $\overline{W}_9$.

Sechiamo ora la $\overline{W}_9$ con un S_9 passante per S_7'. Diciamo r la retta intersezione di $S_3\,(x_j)$ con S_9. Per ogni punto A di r passano ∞^2 rette di S_3, e quindi ∞^2 $S_4 = At'\,t''$, se diciamo t una qualunque di tali rette, costituenti, nell' $S_8 = AS_7'$ una V_6^2 (A), appartenente alla $\overline{W}_9$. Variando A sulla retta r la V_6^2 (A) descrive una V_7^h che sarà l' ulteriore intersezione della W_9, oltre l' S_6', con l' S_9. Vedremo che è $h = 4$ e quindi è 5 l' ordine della $\overline{W}_9$.

Per determinare l' ordine della V_7^h osserviamo che ciascuna sua varietà generatrice V_6^2 (A) seca in S_7' ∞^2 $S_3 = t'\,t''$ con t' variabile nella stella di rette di S_3' di centro A′ (e quindi t'' variabile nella stella di rette

di S_3'' di centro A''). Quindi la V_7^h ha in S_7' ∞^3 S_3 costituenti una V_6', e tali $S_3 = t' t''$ rispondono alle ∞^3 coppie di rette (t', t'') con t' variabile nel complesso delle ∞^3 rette di S_3' appoggiate alla retta r', dove varia A'. Per ogni punto A' di r' si ha una retta $A' A''$ e ∞^2 $S_3 = t' t''$ passanti per $A' A''$, costituenti, in S_7', una V_5' contenuta nella V_6'. Se fissiamo in S_3' un piano π' non passante per A' e diciamo T' il punto in cui una retta t' della stella di centro A' seca π', gli ∞^2 S_3 della V_5' sono del tipo $S_3 = A'A'' T'T''$ con T' variabile nel piano π'. Tale V_5' e quindi la $V_5'^3$ che si ottiene proiettando dalla retta $A'A''$ la $V_3'^3$ costituita dalle ∞^2 rette $T' T''$ congiungenti le coppie di punti omologhi T', T'' dei due piani proiettivi π' e π'. La V_6' è, pertanto, costituita da ∞^1 $V_5'^3$ S_1-coni, aventi per vertici le ∞^1 rette $A'A''$, con A' variabile in r' [e quindi A'' in r'']. Segue che la V_6' è di ordine 2, perchè una generica retta q di S_7' la seca in due punti. Infatti indicate con l' ed s'' le proiezioni di q su S_3' ed S_3'' rispettivamente da S_3'' e da S_3', e indicati con M ed N i punti in cui è secata la retta q dai due $S_4 = s'' S_3'$ ed $S_5 = l' S_3''$ le coppie di punti M, N, si corrispondono in una proiettività i cui punti uniti dànno i punti intersezione della V_6 con la retta q. Infatti fissato in q il punto M resta determinato l' $S_4 = MS_3'$ che seca S_3'' in un punto T'' di s'', a cui corrisponde un punto T' di s'. Resta quindi determinato l' $S_4 = T' S_3''$ che seca q nel punto N. E viceversa fissato N resta determinato M, quindi M ed N si corrispondono in una proiettività sulla retta q. Quando risulta $M = N$ questo punto sarà comune ai due $S_5 = s'' S_3'$ ed $S_5 = l' S_3''$ suddetti e per $M = N$ passa la retta $T' T''$. Indicata con t' la retta di S_3' che passa per T' e si appoggia ad l' ed r', la retta t'' passerà per T'' e si appoggia ad l'' ed r'', e quindi l' $S_3 = t' t''$ contiene la retta $T' T''$, passante per M, ed è un S_3 generatore della V_6'. Sarà perciò M uno dei punti intersezione della retta q con la V_6'. Questa è pertanto di ordine 2.

Tenendo conto che la V_6' che la V_7 ha in S_7' è di ordine 2 ed osservando che un S_{10} passante per S_7' seca la V_7 in una delle sue $V_6^2(A)$ generatrici, quella appartenente all' $S_8 = S_7'A$ indicano con A il punto in cui la retta r di S_3 è secata dall' S_{10}, oltre che nella $V_6'^2$, risulta che la V_7^h è di ordine $h = 4$.

Si ha pertanto che la $\overline{W}_9$ è secata dall' S_9 considerato, passante per S_7', semplice per la $\overline{W}_9$, in una V_7^4, e quindi:

La W_9 *di* S_{11}, *costituita dagli* ∞^4 $S_5 = tt' t''$ *rispondenti alle* ∞^4 *rette t dell'* S_3 *rigato, è di ordine 5.*

Si ricordi che la $\overline{W}_9^5$ costituisce la varietà base del sistema lineare (V^3_{10}) di iperconi cubici rispondenti alle ∞^3 stelle di piani di S_3 (n. 15).

LE EQUAZIONI DI CONGRUENZA IN COORDINATE CURVILINEE

Nota del prof. **Franco Mazzarella**, *presentata dal socio* **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del 4 maggio 1957)

Sunto. — Riferito un corpo deformabile ad un generico sistema di coordinate curvilinee ortogonali, si trasformano le note equazioni di congruenza, sia quelle scritte in termini delle componenti di deformazioni, sia quelle di BELTRAMI, scritte in termini di tensioni, passando da un riferimento cartesiano nel sistema curvilineo assunto; si particolarizzano le formule ottenute per il caso delle coordinate cilindriche.

Nello studio di svariate questioni di teoria dell' elasticità e, particolarmente in molte applicazioni tecniche di questa, si trova conveniente assumere dei sistemi di riferimento diversi da quello usuale cartesiano, e propriamente sceglierne di volta in volta uno in modo opportuno a seconda delle caratteristiche geometriche del corpo in esame, tanto da poter avere in conseguenza delle equazioni più semplici e di più rapida soluzione.

Per tal motivo si è ritenuto utile scrivere le equazioni di congruenza, cioè quelle relazioni che devono legare tra loro le componenti di deformazione, nel più generale sistema di coordinate curvilinee ortogonali, e quindi di trasformare analogamente quelle di BELTRAMI, cioè le sei equazioni che legano tra loro le componenti di tensione esprimendo contemporaneamente le condizioni di congruenza e quelle indefinite di equilibrio.

Preso in considerazione un generico corpo continuo deformabile si assumono per giungere allo scopo avanti indicato contemporaneamente i seguenti sistemi di riferimento:

a) una terna di assi cartesiani ortogonali $x_1\ x_2\ x_3$ di cui tanto l' origine O, quanto l' orientazione si è assegnata nel modo più arbitrario.

b) un sistema di coordinate curvilinee ortogonali u_1, u_2, u_3 le cui tre famiglie di superfici coordinate siano completamente generiche, soggiacendo solo alla condizione che le une taglino le altre secondo le loro linee di curvatura principale, condizione necessaria per la mutua ortogonalità delle superfici stesse.

c) Fermando l' attenzione su di un qualsiasi punto P del corpo in esame ci si avvale infine di un' altra terna cartesiana $y_1\ y_2\ y_3$ avente l' origine in tale punto ed i tre assi orientati secondo le tangenti in P alle linee coordinate $u_1\ u_2\ u_3$ del sistema curvilineo; si indicherà brevemente tale terna con la denominazione di «terna tangente in P».

Si indicheranno con β_{ij} i coseni direttori della tangente alla linea u_i rispetto alla terna x_j e con r_{ij} il raggio di curvatura principale della superficie i-ma nella direzione j-ma.

Posto l' elemento lineare dello spazio nella forma

$$ds^2 = K_1^2\, du_1^2 + K_2^2\, du_2^2 + K_3^2\, du_3^2$$

per le derivate delle β rispetto alle u si avranno le seguenti relazioni

$$(1)\quad \begin{aligned} \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u_i} &= \left(- \frac{\beta_{i+1,j}}{r_{i+1,i}} - \frac{\beta_{i+2,j}}{r_{i+2,i}}\right) \cdot K_i \\ \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u_t} &= K_t \frac{\beta_{tj}}{r_{it}} \qquad \left(\begin{matrix} i,\ j,\ t = 1,\ 2,\ 3 \\ i \neq t \end{matrix}\right) \end{aligned}$$

(per la dimostrazione di queste formule e di altre che avremo occasione di richiamare in seguito, vedi: F. MAZZARELLA «Applicazioni...» Atti Acc. Pontaniana, n. s., Vol. VI).

Indicheremo con ε_i e $\gamma_{i,i+1}$ le sei componenti di deformazione nel punto P prese relativamente alla terna y_i e con e_j e $g_{j,j+1}$ le analoghe relative alla terna x_j queste due sestuple di numeri, notoriamente, sono legate dalle seguenti relazioni:

$$(2)\quad \begin{aligned} e_j &= \sum_i \left(\varepsilon_i\, \beta^2_{i,j} + \gamma_{i,i+1}\, \beta_{i,j}\, \beta_{i+1,j}\right) \\ g_{j,j+1} &= \sum_i \left[2\, \varepsilon_i\, \beta_{i,j}\, \beta_{i,j+1} + \gamma_{i,i+1} \left(\beta_{i,j}\, \beta_{i+1,j+1} + \beta_{i+1,j}\, \beta_{i,j+1}\right)\right] \end{aligned}$$

Ricordando ora che le equazioni di congruenza scritte, in un riferimento cartesiano, sono:

$$(3)\quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_i}{\partial x^2_j} + \frac{\partial^2 e_j}{\partial x^2_i} &= \frac{\partial^2 g_{i,j}}{\partial x_i\, \partial x_j} \\ 2\, \frac{\partial^2 e_i}{\partial x_j\, \partial x_t} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left| \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x_t} + \frac{\partial g_{t,i}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{j,t}}{\partial x_i} \right| \qquad (i \neq j \neq t) \end{aligned}$$

e, tenendo conto delle (1) e delle (2), possono ovviamente esprimersi queste equazioni tramite le ε, γ ed u.

Dopo di aver effettuato tale cambiamento di variabili penseremo che il punto P fosse andato a coincidere con l' origine O e quindi che la terna x si sia sovrapposta a quella y, così facendo tenendo presente che

$$3)\quad \beta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \qquad (i,j = 1,\ 2,\ 3)$$

avremo eliminato tutte le β dalle espressioni così ottenute.

Osserviamo che non si è per niente lesa la generalità, perchè inizialmente sul punto O e sulla terna x non si è posta alcuna limitazione.

Con facili passaggi per le varie derivate delle e_j e $g_{j,j+1}$ rispetto alle x che compaiono nelle (3) si ottengono le seguenti espressioni, sempre quando si sia pensato P coincidente con O.

$$\frac{\partial^2 e_i}{\partial x^2_j} = \frac{1}{K_j}\frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{1}{K_j}\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial u_j}\right) + \frac{1}{K_i}\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial u_i}\frac{1}{r_{i,j}} + \frac{1}{K_t}\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial u_t}\frac{1}{r_{t,j}}$$

$$-\frac{2}{K_j}\frac{\partial \gamma_{i,j}}{\partial u_j}\frac{1}{r_{i,j}} + \gamma_{i,j}\left(\frac{1}{r_{j,i}\, r_{i,j}} - \frac{1}{K_j}\frac{\partial r^{-1}_{i,j}}{\partial u_j}\right) +$$

$$-\gamma_{ti}\left(\frac{1}{r_{i,t}\, r_{t,j}} - \frac{1}{K_i}\frac{\partial r^{-1}_{t,j}}{\partial u_i}\right) + 2\,\frac{\varepsilon_j - \varepsilon_i}{r^2_{i,j}}$$

$$\frac{\partial g_{i,j}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{K_i K_j}\frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial u_i \partial u_j} - \frac{1}{r_{ij}}\frac{1}{K_j}\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial u_j} - \frac{1}{r_{ji}}\frac{1}{K_i}\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial u_i} + \frac{1}{K_i}\frac{\partial \gamma_{it}}{\partial u_i}\frac{1}{r_{ti}} +$$

$$+\frac{1}{K_j}\frac{\partial \gamma_{jt}}{\partial u_j}\frac{1}{r_{tj}} - \frac{2}{K_i}\frac{\partial(\varepsilon_i - \varepsilon_j)}{\partial u_i}\frac{1}{r_{ji}} - \frac{2}{K_j}\frac{\partial(\varepsilon_i - \varepsilon_j)}{\partial u_j}\frac{1}{r_{ij}} +$$

$$+2\,\varepsilon_i\left(\frac{1}{r_{ji}^{\,2}} + \frac{1}{K_i}\frac{\partial r_{i,j}^{-1}}{\partial u_i}\right) + 2\,\varepsilon_j\left(\frac{1}{r_{ij}^{\,2}} + \frac{1}{K_j}\frac{\partial r_{ji}^{-1}}{\partial u_j}\right) + \frac{2\varepsilon_t}{r_{ti}\, r_{tj}} +$$

$$+\frac{4\,\gamma_{ij}}{r_{ij}\, r_{ji}} + \gamma_{it}\left(\frac{1}{K_i}\frac{\partial r_{tj}^{-1}}{\partial u_i} + \frac{1}{r_{it}\, r_{tj}}\right) + \gamma_{jt}\left(\frac{1}{K_j}\frac{\partial r_{ti}^{-1}}{\partial u_j} + \frac{1}{r_{jt}\, r_{ti}}\right)$$

$$\frac{\partial^2 e_i}{\partial x_j \partial x_t} = \frac{1}{K_j K_t}\frac{\partial^2 \varepsilon_i}{\partial u_j \partial u_t} - \frac{1}{r_{tj}}\frac{1}{K_j}\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial u_j} - \frac{1}{r_{jt}}\frac{1}{K_t}\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial u_t} +$$

$$-\frac{1}{K_t}\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial u_t}\frac{1}{r_{ij}} - \frac{1}{K_j}\frac{\partial \gamma_{it}}{\partial u_j}\frac{1}{r_{it}} + \frac{\gamma_i}{r_{tj}\, r_{ij}} + \frac{\gamma_{it}}{r_{jt}\, r_{it}} + \frac{\gamma_t}{r_{ij}\, r_{it}}$$

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_t^{\,2}} = \frac{1}{K_t}\frac{\partial}{\partial u_t}\left(\frac{1}{K_t}\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial u_t}\right) + \frac{1}{r_{it}}\frac{1}{K_i}\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \frac{1}{r_{jt}}\frac{1}{K_j}\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial u_j} - \frac{2}{K_t}\frac{\partial \gamma_{it}}{\partial u_t}\frac{1}{r_{jt}} +$$

$$-\frac{2}{K_t}\frac{\partial \gamma_{jt}}{\partial u_t}\frac{1}{r_{it}} + 2\,\varepsilon_i\left(\frac{1}{K}\frac{\partial r_{it}^{-1}}{\partial u} - \frac{1}{r_{it}\, r_{ji}}\right) + 2\varepsilon_j\left(\frac{1}{K_i}\frac{\partial r_{jt}^{-1}}{\partial u_i} - \frac{1}{r_{jt}\, r_{ij}}\right) +$$

$$+\frac{4\,\varepsilon_t}{r_{it}\, r_{jt}} + \gamma_{it}\left(\frac{1}{r_{jt}\, r_{tj}} - \frac{1}{K_t}\frac{\partial r_{jt}^{-1}}{\partial u_t}\right) - \gamma_{jt}\left(\frac{1}{r_{it}\, r_{ti}} - \frac{1}{K_t}\frac{\partial r_{it}^{-1}}{\partial u_t}\right) - \frac{\gamma_{ij}}{r_{it}^{\,2}} - \frac{\gamma_i}{r_t^{\,2}}$$

$$\frac{\partial^2 g_{ii}}{\partial x_i \partial x_t} = \frac{1}{K_i K_t} \frac{\partial^2 \gamma_{j,i}}{\partial u_i \partial u_t} - \frac{1}{K_i} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial u_i} \frac{1}{r_{ti}} - \frac{1}{K_t} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial u_t} \frac{1}{r_{i,t}} +$$

$$- \frac{1}{K_i} \frac{\partial \gamma_t}{\partial u_i} \frac{1}{r_{it}} + 2 \varepsilon_j \left| \frac{1}{r_{j+1,j+2}\, r_{j,j+1}} - \frac{1}{r_{j,j+2}\, r_{j+1,j+2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r_{j+1,j}\, r_{j,j+2}} \right| + \left| \frac{1}{r_{i,j+2}\, r_{j+1,i}} \frac{2 \varepsilon_i}{r_{i,i}\, r_{t,i}} \right. +$$

$$+ \frac{2 \varepsilon_j}{K_t} \frac{\partial r^{-1}_{j,i}}{\partial u_t} - \frac{2 \varepsilon_t}{r_{t,i}\, r_{j,t}} + \frac{\gamma_{i,j}}{r_{i,t}\, r_{t,i}}$$

Introdotte queste espressioni nelle (3) si hanno in definitiva i seguenti due gruppi di tre equazioni ciascuno:

$$\frac{1}{K_j} \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{1}{K_j} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial u_j} \right) + \frac{1}{K_i} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{1}{K_i} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial u_i} \right) + \frac{1}{K_t} \frac{1}{r_{t,i}} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial u_t} +$$

$$- \frac{1}{K_j} \frac{1}{r_{j,i}} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial u_j} + \frac{1}{K_t} \frac{1}{r_{j+2,1}} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial u_{j+2}} - \frac{1}{K_i} \frac{1}{r_{i,j}} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial u_i} +$$

$$- 2 \varepsilon_j \left[\frac{1}{r^2_{j,j+1}} + \frac{1}{K_j} \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{1}{r_{j,j+1}} \right) \right] -$$

$$- 2 \varepsilon_{j+1} \left[\frac{1}{r^2_{j+1,j}} + \frac{1}{K_{j+1}} \frac{\partial}{\partial u_{j+1}} \left(\frac{1}{r_{j+1,j}} \right) \right] - \frac{2 \varepsilon_t}{r_{ti}\, r_t} =$$

$$= \frac{1}{K_j K_i} \frac{\partial^2 \gamma_{j,i}}{\partial u_j \partial u_{j+1}} + \frac{1}{K_j} \frac{1}{r_{i,j}} \frac{\partial \gamma_{j,i}}{\partial u_j} + \frac{1}{K_i} \frac{1}{r_{i,i}} \frac{\partial \gamma_{j,i}}{\partial u_i} +$$

$$+ \frac{1}{K_{j+1}} \frac{1}{r_{j+2,j}} \frac{\partial \gamma_{j+1,f+2}}{\partial u_{j+1}} + \frac{1}{K_j} \frac{1}{r_{i+2,i-1}} \frac{\partial \gamma_{j+2,1}}{\partial u_j} +$$

$$+ \gamma_{j,i} \left[\frac{2}{r_{j+1,j}\, r_{j,j+1}} - \frac{1}{K_j} \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{1}{r_{j+1,j}} \right) + \frac{1}{K_{j+1}} \frac{\partial}{\partial u_{j+1}} \left(\frac{1}{r_{j,j+1}} \right) \right] +$$

$$+ \gamma_{j+1,j+2} \left[\frac{1}{r_{j+2,j+1}\, r_{j+1,j}} + \frac{1}{r_{j+1,j+2}\, r_{j+2,j}} \right] + \gamma_{j+2,j} \left[\frac{1}{r_{j+2,j+1}\, r_{j,j+1}} + \frac{1}{r_{j+2,j}\, r_{j,j+1}} \right]$$

$$\frac{2}{K_i K_t} \frac{\partial^2 \varepsilon_j}{\partial u_i \partial u_t} - \frac{2}{K_{j+2}} \frac{1}{r_{j+1,j+2}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_{j+2}} - \frac{2}{K_{j+1}} \frac{1}{r_{j+2,j+1}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_{j+1}} +$$

$$+ \frac{2}{K_{j+2}} \frac{1}{r_{j+1,j}} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial u_{j+2}} + \frac{2}{K_{j+1}} \frac{1}{r_{j+2,j}} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial u_{j+1}} - \frac{2}{K_{j+2}} \frac{1}{r_{j+1,i}} \frac{\partial \varepsilon_{j+1}}{\partial u_{j+2}} +$$

$$- \frac{2}{K_{j+1}} \frac{1}{r_{j+2,j}} \frac{\partial \varepsilon_{j+2}}{\partial u_{j+1}} + \frac{2\,\varepsilon_{j+1}}{K_{j+1}} \frac{\partial}{\partial u_{j+1}} \left(\frac{1}{r_{j+2,j}}\right) - \frac{2\,\varepsilon_{j+2}}{K_{j+2}} \frac{\partial}{\partial u_{j+2}} \left(\frac{1}{r_{j+2,j}}\right) =$$

$$= \frac{1}{K_j\, K_{j+2}} \frac{\partial^2 \gamma_{j\,j+1}}{\partial u_j\, \partial u_{j+2}} + \frac{1}{K_j\, K_{j+1}} \frac{\partial^2 \gamma_{j,j+2}}{\partial u_j \partial u_{j+1}} - \frac{1}{K_j^2} \frac{\partial^2 \gamma_{j+1,j+2}}{\partial u_j^2} +$$

$$+ \frac{1}{K_j} \frac{\partial \gamma_{j,j+1}}{u_j} \left[\frac{1}{r_{j+2,j}} - \frac{1}{r_{j+1,j+1}}\right] + \frac{1}{K_j} \frac{\partial \gamma_{j,j+2}}{\partial u_j} \left[\frac{1}{r_{j+1,j}} - \frac{1}{r_{j+1,j+2}}\right] +$$

$$\frac{1}{K_j} \frac{\partial \lambda_{jj+1,j+2}}{\partial u_j} \left[\frac{1}{r_{j+1,j}} + \frac{1}{r_{j,j+2}}\right] - \frac{1}{K_j^3} \frac{\partial \gamma_{j+1,j+2}}{\partial u_j} \frac{\partial K_j}{\partial u_j} +$$

$$+ \frac{1}{K_{j+1}} \frac{\partial \gamma_{j,j+1}}{\partial u_{j+2}} \left[\frac{1}{r_{j,j+1}} - \frac{1}{r_{j,j+2}}\right] + \frac{1}{K_{j+1}} \frac{\partial \gamma_{j,j+2}}{\partial u_{j+1}} \left[\frac{1}{r_{j,j+2}} - \frac{1}{r_{j,j+1}}\right] +$$

$$+ \gamma_{j,j+1} \left[- \frac{1}{r_{j+1,j}\; r_{j+2,j+1}} + \frac{1}{K_j} \frac{\partial}{\partial u_s} \left(\frac{1}{r_{j+2,j}}\right)\right] +$$

$$+ \gamma_{j,j+2} \left[- \frac{1}{r_{j+2,j}\; r_{j+2,j+1}} + \frac{1}{K_j} \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{1}{r_{j+1,j}}\right)\right] +$$

$$+ \gamma_{j+1,j+2} \left[\frac{1}{r_{j,j+2}\; r_{j+1,j}} - \frac{1}{r_{j+1,j}\, r_{j+1,j+2}} + \frac{1}{r_{j,j+1}\; r_{j+2,j}}\right].$$

Indicheremo ora con σ_{ij} le componenti di tensione nel punto P rispetto alla terna y_i e con p_{rs} le analoghe rispetto alla terna x_j; indicheremo ancora con T l'invariante di tensione fornito dalla relazione

$$T = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = p_{11} + p_{22} + p_{33}$$

dopo di che le equazioni di Beltrami in un riferimento cartesiano e nell'ipotesi che siano nulle le forze di massa sono date da:

$$\Delta_2\, p_{rs} + \left(1 + \frac{1}{m}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial x_r\, \partial x_s} = 0$$

(si è indicato con m è il coefficiente di Poisson del materiale di cui è costituito il corpo in esame, che si è supposto omogeneo ed isotropo).

Tra le p_{rs} e σ_{ij} esiste la relazione

$$p_{rs} = \sum_{ij=1}^{3} \sigma_{ij}\; \beta_{ir}\; \beta_{js} \qquad (r,\, s = 1 \ldots 3)$$

e quindi la (6) si scrive

$$\sum \left(\Delta_2 \sigma_{ij} \beta_{ir} \beta_{js}\right) + \left(1 + \frac{1}{m}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial x_r \, \partial x_s} = 0$$

che effettuato il cambiamento di coordinate e pensato sempre di far coincidere P con O si scrive

$$\Delta_2 \sigma_{ij} + \frac{1}{K_i} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_i} \left(\frac{1}{r_{i,i+1}} + \frac{1}{r_{i,i+2}}\right) + \frac{1}{K_j} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_j} \left(\frac{1}{r_{j,j+1}} + \frac{1}{r_{j,j+2}}\right) +$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{m}\right) \left[\frac{1}{K_i K_j} \frac{\partial^2 T}{\partial u_i \, \partial u_j} + \frac{1}{K_i} \frac{\partial T}{\partial u^2} \frac{1}{r_{i,i+1}} + \frac{1}{K_j} \frac{\partial T}{\partial u_j} \frac{1}{r_{j,j+1}}\right] = 0.$$

Concorso al premio biennale accademico dell' Accademia di scienze fisiche e matematiche per gli anni 1957-1958

L' Accademia delle Scienze fisiche e matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli bandisce il concorso al premio biennale accademico per gli anni 1957-1958.

Il premio, di L. 50.000, sarà assegnato all' autore della migliore memoria sul tema: « *Studi e ricerche sulla cinetica chimica* ».

Al concorso possono partecipare soltanto i cittadini italiani, esclusi i soci della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli.

Le memorie devono essere scritte in lingua italiana e pervenire alla Segreteria dell' Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, nella sede di questa (via Mezzocannone, 8), entro le ore 12 del dì 31 ottobre 1958.

Ciascuna memoria non porterà il nome dell' autore, ma sarà distinta con un motto, il quale dovrà essere ripetuto sopra una busta suggellata, che conterrà la scheda recante il nome dell' autore.

Le buste della memoria premiata e di quelle che avranno ottenuto l' *accessit* saranno aperte nell' adunanza plenaria del gennaio 1959 della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli.

Tutte le memorie presentate al concorso saranno conservate nell' archivio dell' Accademia banditrice.

Napoli, 1° gennaio 1957.

Il Segretario GEREMIA D' ERASMO — *Il Presidente* CARLO MIRANDA

Gli acidi nucleici
nel plasma sanguigno di animali di specie diverse

Nota del dott. **Oscar Goglia**, *presentata dalla socia* **A. Orrù** *)

(Adunanza del dì 2 marzo 1957)

Sunto. — E' stata studiata, in via preliminare, la ripartizione degli A. N. nel plasma sanguigno di alcuni mammiferi (agnello, asino, cane, cavallo, coniglio, maiale, ratto, vitello) e di alcuni uccelli (gallina e piccione).

Per i mammiferi i valori più elevati di RNAP e di DNAP si sono riscontrati nel plasma di cane (rispettivamente mg. 3,01 e mg. 0,69/litro); nel plasma degli altri animali l'RNAP oscilla tra un valore medio di mg. 1,19/litro (asino, coniglio, vitello, ratto, agnello) ed uno di mg. 0,75/litro (cavallo, maiale), mentre il DNAP ($a - b$) mostra oscillazioni minori tra mg. 0,34 e mg. 0,53/litro.

Per gli uccelli, i valori dell'RNAP sono in media di mg. 1,865/litro, mentre quelli del DNAP ($a - b$) variano da mg 0,72/litro, nel plasma di gallina, a mg. 0,43 in quello di piccione.

L'interesse destato dagli acidi nucleici, quali costituenti normali ed essenziali di tutte le cellule animali e vegetali, ha richiamato l'attenzione di qualche biologo sulla loro presenza nel sangue.

Nella letteratura, al riguardo, è possibile trovare, riportati qua e là, dei valori che si riferiscono al sangue in toto, o alla sola parte figurata, o al plasma (1). Si tratta, in effetti, di pochi dati e non di una indagine sistematica, che permetta di mettere in rilievo, e di valutare, eventuali variabilità nel contenuto dei due tipi di acidi nucleici nell'ambito di una stessa specie o tra specie diverse.

Ciò mi ha indotto ad iniziare sistematicamente, con metodi appropriati e sempre in eguali condizioni, lo studio del contenuto e della ripartizione dell'acido ribonucleico (RNA) e deossiribonucleico (DNA) nel sangue.

In questa nota preliminare riferisco i valori osservati nel plasma sanguigno di alcuni mammiferi (agnello, asino, cane, cavallo, coniglio, maiale, ratto, vitello) e di alcuni uccelli (gallina e piccione).

Le sole indicazioni che ho potuto reperire, riguardanti gli acidi nu-

---

*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale dell'Università di Napoli.

cleici del plasma e, in particolare, del plasma umano, sono da attribuirsi a MANDEL e MÉTAIS (2). Dai risultati delle loro determinazioni riguardanti il plasma di numerosi individui, maschi e femmine, in condizioni fisiologiche e patologiche, risulta che il tenore totale degli acidi nucleici, espressi in fosforo, oscilla, nel plasma di individui normali, tra 4, 4 e 6,5 mg. per 1000 ml., pari ad un valore di A. N. di mg. 35 a 52 per litro, di cui il 90 % circa, costituito da RNA ed il rimanente da DNA. In un solo caso di gravidanza, gli AA. riscontrarono valori notevolmente più elevati, mentre non osservarono modificazioni importanti nei soggetti patologici esaminati.

Parte sperimentale.

Per l' estrazione e la separazione degli acidi nucleici, si è adottata la tecnica di SCHMIDT e THANNAUSER (3), usata dalla maggior parte degli AA., con qualche modificazione (4).

La determinazione è stata fatta dosando il P col metodo colorimetrico di FISKE e SUBBAROW (5).

Le determinazioni del pentosio col metodo dell' orcinolo (6), e del deossipentosio col metodo della difenilamina (7), non sono risultate idonee; la prima perchè non dà colorazione stabile, e la seconda perchè insensibile alle scarse quantità di DNA contenute nel plasma sanguigno.

Il sangue fu prelevato, per alcuni animali (agnello, asino, cavallo, maiale, vitello), al macello nel momento in cui essi venivano sacrificati; per altri (cane, ratto, coniglio), o dalla vena femorale o direttamente dal cuore; negli uccelli (gallina e piccione), fu prelevato dopo decapitazione.

Degli animali si conosceva approssimativamente, l' età che è indicata nella tabella.

Il sangue, trattato al momento del prelevamento con un anticoagulante (10 mg. di NaF/ml.) si centrifugava allo scopo di separare la parte figurata dal plasma, il quale veniva raccolto in tubi da centrifuga da 50 ml. Per ogni determinazione si adoperavano campioni duplicati, di 20 ml. di plasma ciascuno.

Ad ogni campione si aggiungeva, a goccia a goccia, acido tricloroacetico (ATC) freddo al 10 %, fino ad ottenere un abbondante precipitato; dopo centrifugazione, il precipitato proteico veniva trattato (seguendo la tecnica di SCHMIDT e THANNAUSER) successivamente con: ATC freddo all' 1 %, acqua, alcool-etere (estrazione a caldo), metanolo-cloroformio (pure a caldo). Dopo aver lavato il residuo dell' estrazione con etere, ed essiccato sotto vuoto, il precipitato veniva incubato con KOH N per 18*h* a 37°C, e su un' aliquota dell' idrolizzato si determinava il P totale. Un' altra aliquota serviva per precipitare il DNA con HCl 6N e ATC al 5 %, e sul supernatante così separato, si determinava il P dell' RNA. Il residuo

TABELLA

Animale	Età	P totale (a)	RNAP (b)	DNAP		RNAP/DNAP b : a—b)	RNAP/DNAP (b : c)
				calcolato (a—b)	determinato (c)		
Agnello	8 mesi	1,50	1,09	0,41	0,54	2,65	2,02
Asino	3 anni	1,73	1,26	0,47	0,67	2,67	1,88
Cane	10 anni	3,70	3,01	0,69	0,73	4,21	4,12
Cavallo	7 anni	1,15	0,80	0,35	--	2,28	—
Coniglio	10 mesi	1,59	1,25	0,34	0,43	3,67	2,90
Maiale	12 mesi	1,13	0,70	0,53	0,45	1,50	1,55
Ratto	10 mesi	1,49	1,13	0,36	0,44	3,13	2,56
Vitello	18 mesi	1,66	1,22	0,44	0,56	2,77	2,18
Gallina	13 mesi	2,60	1,88	0,72	0,71	2.61	2,64
Piccione	3 mesi	2,28	1,85	0,43	0,53	4,30	3,49

N. B. — Tutti i valori della tabella sono espressi in mg. di P/litro di plasma. Ognuno di essi rappresenta la media di almeno due determinazioni.

contenente DNA veniva solubilizzato (come consiglia SCHNEIDER) (8), con ATC al 5%/0 (per 30′ a 90-95°C) e quindi portato al volume di 6 ml, con lo stesso ATC al 5%/0; su un' aliquota di 2 ml. della soluzione così ottenuta, si determinava il P del DNA (frazione *c*).

Nell' unita tabella si riportano i valori ottenuti, in via preliminare, per il plasma di otto mammiferi e di due uccelli.

Conclusioni.

L' esame dei dati, che si riferiscono ai mammiferi, rivela:

1°) il P totale presenta un valore molto elevato nel plasma del cane (3,70 mg./litro); nel restante gruppo di animali, il valore medio oscilla tra mg. 1,59 (asino, vitello, coniglio, agnello, ratto) e mgr. 1,14/litro (cavallo, maiale);

2) i valori dell' RNAP mostrano lo stesso andamento, con una punta massima per il cane (mg. 3,01/litro) e oscillazioni tra un valore medio di mg. 1,19/litro (asino, coniglio, vitello, ratto, agnello) e uno di mg. 0,75/litro (cavallo, maiale);

3) i valori del DNAP, ricavati dalla determinazione del P sul residuo *c*, sono in genere un po' più elevati di quelli ricavati per differenza ($a - b$). Comunque, anche per il DNAP si riscontrano valori superiori nel plasma di cane (mg. 0,69/litro), per quanto le differenze con i valori riscontrati per gli altri animali, non siano così rilevanti come per l' RNAP (oscillano tra mg. 0,34 e mg. 0,53/litro);

4) Le differenze riscontrate per l' RNAP e per il DNAP, si ripercuotono naturalmente sui rapporti $\frac{RNAP}{DNAP}$ calcolati considerando il DNAP ricavato sia da ($a - b$) che da *c*. Nei due casi, il valore del rapporto è sempre superiore per il cane (4,21 - 4,12) e più basso per il maiale (1,50 - 1,55), mentre per gli altri animali si hanno valore intermedi.

L' esame dei valori, che si riferiscono al plasma di uccelli (gallina, piccione), rivela:

1) il P totale è abbastanza elevato nei due casi considerati (mg. 2,60 - 2,28/litro);

2) l' RNAP presenta anch' esso valori molto vicini tra loro (mg. 1,88 - 1,85/litro);

3) il DNAP, sia calcolato dalla differenza ($a - b$), sia determinato direttamente sul residuo *c*, mostra sempre valori più bassi per il piccione (0,72 - 0,71 per la gallina e 0,43 - 0,53 per il piccione);

4) in relazione ai più bassi valori del DNAP, i rapporti $\frac{RNAP}{DNAP}$ sono più elevati per il plasma del piccione.

BIBLIOGRAFIA

1. Albritton. *Standard values in blood*, 1953, pag. 90.
2. Mandel P. e Métais P. Compt. Rend. Soc. Biol., vol. CXLII, pag. 241 (1948).
3. Schmidt G. e Thannauser S. J. J. Biol. Chem., 161, 831 (1945).
4. Badolato F. e Calabrese A. M. « La Ricerca Scientifica », f. 9, 2558 (1955).
5. Fiske e Subbarow Y J. Biol. Chem., *66*, 375 (1925).
6. Mejbaum W. Z. Physiol. Chem., 258, 117 (1939).
7. Dische Z. « *Mikrokemie* » 8, 4 (1930).
8 Schneider W. C. J. Biol. Chem., *164*, 742 (1946).

SUI GRUPPI φ-ISOMORFI AD UN GRUPPO SPECIALE FINITO

Nota del dott. **Mario Curzio** *presentata dal socio* **A. Franchetta**

(Adunanza del dì 1° giugno 1957)

Sunto. — Si caratterizzano i gruppi risolubili pei quali il reticolo dei sottogruppi di composizione è isomorfo al reticolo dei sottogruppi d'un gruppo speciale finito.

Sia G un gruppo (finito o non) e φ(G) il reticolo [1] dei suoi sotto gruppi di composizione (sottogruppi appartenenti a qualche catena normale di G). Diremo che G è *φ-isomorfo* ad un gruppo G′ se i reticoli φ(G) e φ(G′) sono isomorfi.

In una mia recente nota [2] ho caratterizzato i gruppi risolubili finiti φ-isomorfi ad un p-gruppo finito. Nel presente lavoro determino invece i gruppi risolubili G. φ-isomorfi ad un gruppo speciale finito G′. Dimostro che G è di necessità finito ed è il prodotto diretto di gruppi (necessariamente risolubili) φ-isomorfi ai sottogruppi di SYLOW di G′ ed aventi ordini a due a due primi tra loro.

Poichè d'uso essenziale per il seguito, riporto i seguenti teoremi dimostrati nel citato lavoro [2]:

TEOREMA A — *Sia* G′ *un p-gruppo ciclico e* G *un gruppo risolubile finito.* G *e* G′ *risultano φ-isomorfi se, e solo se* G *è un gruppo d'uno dei tipi sottoindicati:*

1) *Ciclico d'ordine potenza d'un numero primo.*

2) *D'ordine $p^\alpha q^\beta$ (p, q num. primi, $p > q$) avente ciclici i sottogruppi di* SYLOW *e godente della proprietà che il suo derivato (d'ordine p^α) è centralizzante di se stesso.*

TEOREMA B — *Sia* G′ *un gruppo finito non ciclico e* G *un gruppo risolubile finito. Allora,* G *e* G′ *sono φ-isomorfi se, e solo se hanno lo stesso ordine e sono strutturalmente isomorfi.*

Ricordiamo che due gruppi diconsi *strutturalmente isomorfi* se sono isomorfi i reticoli dei loro sottogruppi.

1. — In questo num. dimostro alcune proposizioni preliminari. Precisamente:

LEMMA I — *Il gruppo risolubile* G *ed il reticolo* φ(G), *sono insieme finiti od infiniti.*

Ovviamente sarà sufficiente provare che se $\varphi(G)$ è finito, tale è anche G. Si consideri la catena di G:

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_r \supset G_{r+1} = E ,$$

essendo G_i il derivato di G_{i-1} ($i = 1, 2, \ldots, r + 1$) ed E il sottogruppo identico di G. Gli elementi dell'insieme $\varphi(G_{i-1}/G_i)$ possono mettersi in corrispondenza biunivoca con quelli dell'insieme ψ_i degli elementi di $\varphi(G)$ contenuti in G_{i-1} e contenenti G_i, allora $\varphi(G_{i-1}/G_i)$ è finito poichè ψ_i lo è al pari di $\varphi(G)$. Il gruppo G_{i-1}/G_i è abeliano e pertanto $\varphi(G_{i-1}/G_i)$ si identifica col reticolo dei sottogruppi di G_{i-1}/G_i. Il fattoriale G_{i-1}/G_i risulta finito in quanto possiede un numero finito di sottogruppi.

Ciò premesso, G_{r-1} è finito in quanto i gruppi G_{r-1}/G_r e $G_r = G_r/G_{r+1}$ hanno entrambi ordine finito. Così continuando, si riconosce che anche i gruppi $G_{r-2}, \ldots, G_1$, G sono finiti.

Osservazione I. — Se $\varphi(G)$ è finito e G non risolubile, G può non essere finito; si pensi ad es. a un gruppo semplice infinito.

LEMMA II. — *Sia* G *un gruppo finito e risolubile. Ogni sottogruppo di composizione di* G *risulta unico nel suo ordine se, e solo se* G *è a sottogruppi di* SYLOW *ciclici.*

In primo luogo supponiamo G a sottogroppi di SYLOW ciclici.

Sia M un sottogruppo normale di G ed N un sottogruppo normale di M. Tempo addietro, K. HONDA [3] ha dimostrato che in un gruppo finito a sottogruppi di SYLOW ciclici due sottogruppi d'ugual ordine sono necessariamente coniugati. Pertanto, M è caratteristico in G ed N lo è in M essendo anche M a sottogruppi di SYLOW ciclici.

Da ciò segue che N è normale in G e quindi G è un t-gruppo. Dunque, in G ogni sottogruppo di composizione è normale e, per il citato teorema di HONDA, è unico nel suo ordine.

Viceversa, ogni sottogruppo di composizione di G sia unico nel suo ordine. In tal caso ogni sottogruppo di composizione di G è normale; allora, $\varphi(G)$ si identifica col reticolo $L_N(G)$ dei sottogruppi normali di G. In una mia recente nota [4] ho dimostrato che se in un gruppo finito H ogni sottogruppo normale è unico nel suo ordine il reticolo $L_N(H)$ è distributivo. Dunqne $\varphi(G)$ è distributivo, in base ad un teor. di G. ZAPPA [5] ciò basta affinchè G sia a sottogruppi di SYLOW ciclici.

Osservazione II. — Sia G un gruppo finito a sottogruppi di SYLOW ciclici. Il citato teor. di ZAPPA prova che $\varphi(G)$ è distributivo. In base al *Lemma II* tale risultato si ritrova al modo seguente:

Se G è a sottogruppi di SYLOW ciclici si ha (*Lemma II*): $\varphi(G) =$

$= L_N(G)$ ed ogni sottogruppo normale di G è unico nel suo ordine; allora [4] $L_N(G)$ è distributivo e quindi anche $\varphi(G)$ è distributivo.

LEMMA III. — *Sia* G *un gruppo finito e* P *un suo sottogruppo di* SYLOW. *Se* P *è di composizione in* G *vi è anche normale.*

Sia:

$$G \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_r \supset P \supset \ldots \supset E,$$

una catena normale di G passante per P supposto di composizione in G. P è sottogruppo di SYLOW anche per G_r; onde, P essendo normale in G_r vi è caratteristico poichè unico nel suo ordine. Da ciò e dall'essere G_r normale in G_{r-1} si deduce che P è normale in G_{r-1}, anzi, caratteristico poichè suo sottogruppo di SYLOW. Così procedendo si riconosce facilmente che P è normale in $G_{r-2}, \ldots, G_1, G$.

Il *Lemma III* è sostanzialmente dovuto al WIELANDT [1], ne ho data una dimostrazione per comodità del Lettore.

Osserviamo infine che, in base al *Lemma I,* un gruppo risolubile φ-isomorfo ad un p-gruppo finito ha necessariamente ordine finito; pertanto, è inessenziale l'ipotesi di finitezza formulata pei gruppi G di cui ai *Teoremi A* e *B.*

2. — In questo numero caratterizzo i gruppi risolubili G φ-isomorfi ad un gruppo speciale finito G'.

Per il *Lemma I* il gruppo G è finito; inoltre, $\varphi(G')$ si identica, essendo G' speciale, col reticolo dei sottogruppi di G'.

Distinguiamo i casi seguenti:

a) G' *è privo di sottogruppi di* SYLOW *ciclici.*

Poichè G' è speciale si ha:

$$G' = S_1' \times S_2' \times \ldots \times S_t'$$

essendo $S_1', S_2', \ldots, S_t'$ i sottogruppi di SYLOW di G'. Detto w un isomorfismo tra $\varphi(G)$ e $\varphi(G')$ il sottogruppo di G: $w^{-1}(S_i') = S_i$ $(i = 1, 2, .., t)$ ha lo stesso ordine $p_i^{\alpha_i}$ di S_i'; ciò in quanto vale il *Teorema B* e poichè, S_i, risolubile al pari di G, è φ-isomorfo al p_i-gruppo non ciclico S_i'. Pertanto, $p_i^{\alpha_i}$ divide l'ordine g di G; ma, essendo i numeri $p_i^{\alpha_i}$ a due a due primi tra loro, ne segue che g è divisibile per l'ordine $g' = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t}$ di G'. In un gruppo risolubile finito i fattori di composizione sono tanti quanti i divisori primi dell'ordine del gruppo; avendo $\varphi(G)$ e $\varphi(G')$ ugual lunghezza, ne discende che G ha esattamente $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_t$ divisori primi. Perciò, essendo g divisibile per g', i gruppi G e G' hanno lo stesso ordine. Dunque, S_i è sottogruppo di SYLOW di G ed essendo di composi-

zione in G vi è anche normale (*Lemma III*). Tenendo presente che S_i' ed S_i sono strutturalmente isomorfi (*Teor. B*) si conclude nel modo seguente:

1) *Se G′ è privo di sottogruppi ciclici, G è speciale e strutturalmente isomorfo a G′.*

b) *G′ è un gruppo ciclico.*

Poichè L(G′) = φ(G′) è distributivo, tale è anche φ(G); onde per il citato teor. di G. ZAPPA [5], G è a sottogruppi di SYLOW ciclici. Per semplicità si supponga che G′ abbia due soli sottogruppi di SYLOW S_1' e S_2'. Detto ancora w un isomorfismo tra φ(G) e φ(G′) si considerino i sottogruppi di G : $w^{-1}(S_i') = S_i$ $(i = 1, 2)$. Il gruppo risolubile S_i è φ-isomorfo al p_i-gruppo ciclico S_i'; allora, per il *Teor. A*, l'ordine di S_i vale $p_i^{\alpha_i} q_i^{\beta_i}$ (p_i, q_i num. primi distinti o non).

Mostriamo che $p_1^{\alpha_1} q_1^{\beta_1}$ e $p_2^{\alpha_2} q_2^{\beta_2}$ sono primi tra loro.

I sottogruppi S_1, S_2 sono di composizione in G e quest'ultimo è a sottogruppi di SYLOW ciclici; allora, per il *Lemma II*, S_1 e S_2 sono in G unici nei loro ordini e quindi normali.

E': $G' = S_1' \times S_2'$ e conseguentemente [1]:

$$G = S_1 \cup S_2 \qquad E = S_1 \cap S_2 ,$$

poichè S_1, S_2 sono normali in G si ha pertanto: $G = S_1 \times S_2$. Supponiamo per assurdo che gli ordini di S_1, S_2 abbiano un divisore comune maggiore dell'unità, ad es. sia $p_1 = p_2$ tale divisore. Il gruppo S_i possiede un sottogruppo P_i d'ordine p_1; poichè S_1, S_2 sono permutabili elemento per elemento, si ha che l'ordine di $P_1 \cup P_2$ vale P_1^2. Dunque $P_1 \cup P_2$ è contenuto in un sottogruppo di SYLOW di G e non è ciclico, siamo giunti ad un assurdo essendo G a sottogruppi di SYLOW ciclici. Se G′ ha più di due sottogruppi di SYLOW si ragiona analogamente a quanto sopra.

Dunque:

2) *Se G′ è ciclico, G è il prodotto diretto di gruppi dei tipi* (1) *e* (2) *aventi ordini a due a due primi tra loro.*

Viceversa, sia G prodotto diretto di gruppi dei tipi (1) e (2) supposti a due a due d'ordini primi tra loro. Il reticolo L(G) è in queste condizioni prodotto cardinale di reticoli irriducibili L(S_i). Il reticolo φ(G) è prodotto delle catene φ(S_i) e G risulta φ-isomorfo ad un gruppo ciclico.

c) *G′ non è ciclico e possiede almeno un sottogruppo di* SYLOW *ciclico.*

---

[1]) Un isomorfismo tra reticoli conserva le operazioni di unione e intersezione.

Supponiamo per semplicità che G′ abbia due soli sottogruppi di Sylow S_1' e S_2' di cui il primo ciclico ed il secondo (necessariamente) non ciclico d'ordine r^γ (r numero primo). Sia ancora w un isomorfismo tra $\varphi(G)$ e $\varphi(G')$. Per il *Teor. A* il gruppo $S_1 = w^{-1}(S_1')$ ha ordine $p^\alpha q^\beta$ (p, q num. primi distinti o non); per il *Teor. B*, $S_2 = w^{-1}(S_2')$ ha ordine r^γ. Detto R′ un sottogruppo d'ordine r di S_2', $R = w^{-1}(R')$ ha ordine r quale sottogruppo minimo di S_2.

Ciò premesso, proviamo che gli ordini di S_1 ed S_2 sono primi tra loro.

Il sottogruppo $S_1' \cup R'$ di G′ è ciclico e φ-isomorfo al sottogruppo di G: $w^{-1}(S_1' \cup R') = S_1 \cup R$. Il gruppo $S_1 \cup R$ ha evidentemente ordine $p^\alpha q^\beta r$; ma, per quanto dimostrato in b), r è primo con $p^\alpha q^\beta$.

H. Wielandt ha dimostrato [1] che se H, K sono sottogruppi di composizione d'un medesimo gruppo aventi ordini primi tra loro, si ha: $H \cup K = H \times K$.

E': $G' = S_1' \times S_2'$, dunque:

$$G = S_1 \cup S_2 \qquad E = S_1 \cap S_2 .$$

Da ciò e poichè S_1, S_2 hanno ordini primi tra loro, segue per il citato teor. di Wielandt:

$$G = S_1 \times S_2 .$$

A conclusioni analoghe si giunge se G′ ha più di due sottogruppi di Sylow.

3. — I risultati del num. precedente permettono di dare il teorema che conclude questa nota.

Precisamente:

TEOREMA C. — *Sia G′ un gruppo speciale finito ed* $S_1', S_2', \ldots, S_t'$ *i suoi sottogruppi di* Sylow.

Un gruppo risolubile G risulta φ-isomorfo a G′ se, e solo se risulta:

$$G = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_t$$

ove S_i è un gruppo risolubile φ-isomorfo ad S_i' e gli S_i hanno ordini a due a due primi tra loro ($i = 1, 2, \ldots, t$).

La costruzione dei gruppi G_i risulta effettivamente possibile in quanto i gruppi S_i sono determinabili a norma dei *Teor. A* e *B*. I gruppi S_i di cui al *Teor. C* sono supersolubili in quanto o p-gruppi o a sottogruppi di Sylow ciclici; pertanto:

Un gruppo risolubile φ-isomorfo ad un gruppo speciale finito risulta supersolubile.

BIBLIOGRAFIA

[1] Wielandt H. *Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen.* Math. Zeitschrift, Vol. 45 (1939).

[2] Curzio M. *Sul reticolo dei sottogruppi di composizione di alcuni gruppi finiti.* Boll. U. M. I., Serie III, Anno XII (1957).

[3] Honda K. *On finite groups, whose Sylow-groups are all ciclyc.* Comm. Math. Univ. S. Pauli (1952).

[4] Curzio M. *Alcune osservazioni sul reticolo dei sottogruppi d'un gruppo finito.* Ric. di Mat., Vol. VI (1957).

[5] Zappa G. *Sui gruppi finiti risolubili per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo.* Boll. U. M. I., Serie III, Anno XI (1956).

Sulla prima curva osculatrice di un ramo superlineare di una curva algebrica piana completa

Nota I del socio ordinario **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 1° giugno 1957)

Sunto. — Si studia la singolarità della prima curva osculatrice $C^{v+v'}$ di un ramo superlineare di ordine v e classe $v' > v$ nell'origine del ramo, e punti multipli infinitamente vicini. Si determina l'effettivo comportamento della polare in tali punti e si mette in evidenza che il conseguente abbassamento della classe, determinato da tali punti, è sempre determinato dall'equivalente pluckeriano che sta ad indicare la possibilità di definire la singolarità stessa come condensazione di nodi e cuspidi. Si considera anche la V_3 di S_5 determinata dalla $C^{v+v'}$ completa.

1. *Prima curva osculatrice un ramo superlineare.*

Assumendo come origine di un ramo di ordine v e prima classe v', di una curva algebrica del piano $S_3(x, y) = (x_1, x_2, x_3)$, l'origine $O = A_3$ $(0, 0, 1)$ delle coordinate, e come tangente al ramo l'asse delle x, congiungente A_3 con il punto A_1 $(1, 0, 0)$, l'equazione della prima curva osculatrice il ramo nell'origine è del tipo:

$$y = bx^{\frac{v+v'}{v}}, \qquad (b \neq 0) \qquad (v > 1) \tag{1}$$

ovvero,

$$y^v = b^v x^{v+v'}. \tag{2}$$

Posto $b^v = a$ si ha l'equazione del tipo:

$$y^v + ax^{v+v'} = 0. \qquad (a \neq 0) \tag{3}$$

Per $a = 1$, $v = 12$, $v' = 101$ si ha la curva:

$$y^{12} + x^{113} = 0,$$

chè dà uno degli esempi considerati da B. Segre [1]) ed E. Vesentini [2])

[1]) B. Segre, *Sullo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche.* (Ann. di Matematica. (4), XXXIII (1952)).

[2]) B. Vesentini, *Sul comportamento effettivo delle curve polari nei punti multipli.* (Ann di Matematica. (4), XXXIV (1953)).

nello studio del *comportamento effettivo delle polari nei punti multipli* della curva data, per mettere in evidenza che non sempre vale in proposito il teorema relativo alla *legge di alternanza* enunciata dall' ENRIQUEZ [3]).

Quest' osservazione mette in evidenza l' interesse particolare che ha lo studio delle curve del tipo (3), cioè delle curve $C^{v+v'}$ di equazioni, in coordinate omogenee, del tipo:

$$(4) \qquad f(x_1, x_2, x_3) = x_2^v x_3^{v'} + a x_1^{v+v'} = 0.$$

Le tre derivate prime di $f(x_j)$ sono date da:

$$(5) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = (v + v')\, a x_1^{v+v'-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = v x_2^{v-1} x_3^{v'}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = v' x_2^v x_3^{v'-1},$$

e quindi la polare di un punto $Y(y_1, y_2, y_3)$ ha l' equazione:

$$(6) \qquad a(v + v')\, y_1 x_1^{v+v'-1} + v y_2 x_2^{v-1} x_3^{v'} + v' y_3 x_2^v x_3^{v'-1} = 0.$$

Dalle (5) si ricava che le tre derivate non si annullano in alcun punto fuori della retta $x_1 = 0$ e che se $v > 1$ si annullano in $A_2\,(0, 1, 0)$ [oltre ad annullarsi in $A_3\,(0, 0, 1)$, origine del ramo, superlineare (e quindi con $v > 1$)]. Si ha perciò:

Se è $v' = 1$ *la* C^{v+1} *ha il solo punto multiplo* v-plo A_3.
Se è $v' > 1$ *la* $C^{v+v'}$ *ha due soli punti multipli:* A_2 v'-plo e A_3 v-plo.

NOTA. — Nel seguito supporremo che siano v e v' *primi tra di loro. Nel caso che sia* $v' = 1$, e quindi l' equazione della curva del tipo:

$$(7) \qquad x_2^v x_3 + a x_1^{v+1} = 0$$

si ha una C^{v+1} avente nel punto semplice A_2 la tangente $x_3 = 0$ a contatto $(v + 1)$ — punto, e quindi una tangente v-pla di flesso; tale retta $a_3 = A_2 A_1$ presenta pertanto la *singolarità duale* del punto A_3. [Per $v = 2$ si ha, in particolare, una cubica C^3 con il punto doppio cuspidale A_3 e la tangente doppia di flesso a_3. I due punti di contatto della tangente di flesso a_3 sono A_2 ed il punto $A_2^{(1)}$ infinitamente vicino ad A_2 nella retta a_3. Le due tangenti del punto doppio cuspidale A_3 sono la retta a_2 e la retta $a_2^{(1)}$ infinitamente vicina [3]) ad a_2 nel fascio di centro A_3].

---

[3]) F. ENRIQUEZ, *Sulla teoria delle singolarità delle curve algebriche.* (Rend. Lincei, (5) XXV (1916)).

Nel caso che sia $v' > 1$, e quindi anche A_2 multiplo per la $C^{v+v'}$, per la coppia punto-retta (A_2, a_3) si ha la singolarità duale di quella della coppia punto-retta (A_3, a_2):

A_3 *è origine di un ramo di ordine v e classe v'*
a_3 *è origine di un ramo-inviluppo di classe v e ordine v'.*
A_2 *è origine di un ramo di ordine v' e classe v*
a_2 *è origine di un ramo inviluppo di classe v' e ordine v.*

Di tali quattro rami troveremo le equazioni parametriche (nn. 2 e 5).

Nello studio della curva (7), scambiando eventualmente la variabile x_2 con la x_3 *si può supporre,* senza venir meno alla generalità, che sia x_3 ad aver l' esponente maggiore, cioè *che sia $v' > v$.*

2. *Equazioni parametriche della $C^{v+v'}$, e dei due rami di origine A_2 e A_3.*

Le equazioni parametriche della curva $C^{v+v'}$ di equazione (4) sono date da:

$$x_1 = \rho^v \sigma^{v'}, \qquad x_2 = h\rho^{v+v'}, \qquad x_3 = \sigma^{v+v'} \tag{8}$$

con i due parametri omogenei ρ, σ e dove s' è posto:

$$h = (-a)^{\frac{1}{v}}$$

e quindi:

$$h^v + a = 0. \tag{10}$$

Infatti sostituendo le (8) nella (4) si ha:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (h\rho^{v+v'})^v (\sigma^{v+v'})^{v'} + a(\rho^v \sigma^{v'})^{v+v'} \\ &= h^v \rho^{(v+v')v} \sigma^{(v+v')v'} + a\rho^{(v+v')v} \sigma^{(v+v')v'} \\ &= (h^v + a) \rho^{(v+v')v} \sigma^{(v+v)v'} \end{aligned} \tag{11}$$

e quindi per la (10) risulta soddisfatta l' equazione (4) qualunque siano ρ *e* σ.

In particolare per $\sigma = 1$ dalle (8) si hanno le *equazioni parametriche:*

$$x_1 = \rho^v, \qquad v_2 = h\rho^{v+v'}, \qquad x_3 = 1 \tag{12}$$

del ramo della $C^{v+v'}$ di origine $A_3\,(0, 0, 1)$, di ordine v e classe v'.

Dalle (8) per $\rho = 1$ si hanno, invece, *le equazioni parametriche:*

$$x_1 = \sigma^{v'}, \qquad x_2 = h, \qquad x_3 = \sigma^{v+v'} \tag{13}$$

del ramo della $C^{v+v'}$ di origine $A_2\,(0, h, 0)$ di ordine v' e classe v.

3. *Abbassamento della classe per la $C^{v+v'}$ determinato da ciascuno dei suoi punti multipli separatamente.*

Per calcolare l'abbassamento della classe della $C^{v+v'}$ determinato dal suo punto multiplo A_3, origine di un unico ramo della curva, di ordine v e classe v', di equazioni parametriche (12), basta calcolare la multiplicità d'intersezione in A_3 di tale ramo con la polare (6) del punto generico Y del piano. Sostituendo le (12) nella (6) si ha l'equazione in ρ:

$$(14)\quad F(\rho) = (v+v')\, a\rho^{(v+v'-1)v}\, y_1 + vh^{v-1}\, \rho^{(v+v')(v-1)}\, y_2 + v'h^{v'-1}\, \rho^{(v+v')v}\, y_3 = 0$$

la quale ammette la radice $\rho = 0$, rispondente al punto A_3 origine del ramo, con la multiplicità $(v + v')(v - 1)$ essendo questo il minore dei tre esponenti che ha il parametro ρ nella $F(\rho)$. Si ha perciò:

I) *L'abbassamento della classe per la $C^{v+v'}$ dal punto multiplo A_3 è stato da:*

$$(15)\qquad D_3 = (v + v')(v - 1).$$

Sostituendo invece nell'equazione (6) della polare di Y le equazioni parametriche (13) del ramo della $C^{v+v'}$ avente per origine l'altro punto multiplo A_2, si ha l'equazione in σ:

$$(16)\quad F(\sigma = (v+v')\, a\sigma^{(v+v'-1)v'}\, y_1 + vh^{v-1}\, \sigma^{(v+v')v'}\, y_2 + v'h^{v'}\, \sigma^{(v+v')(v'-1)}\, y_3 = 0$$

la quale ammette la radice $\sigma = 0$, rispondente al punto A_2 origine del ramo con la multiplicità $(v + v')(v' - 1)$ essendo questo il minore dei tre esponenti che ha il parametro σ nella $F(\sigma)$. Si ha perciò:

II) *L'abbassamento della classe determinata per la $C^{v+v'}$ dal punto multiplo A_2 è dato da:*

$$(17)\qquad D_2 = (v + v')(v' - 1).$$

NOTA. — Nel caso della curva, considerata nel n. 1, C^{113}, di B. SEGRE, essendo $v = 12$ e $v' = 101$, si ha:

per la (15): $D_3 = (12 + 101)\ (12 - 1) = 1243$

per la (17): $D_2 = (12 + 101)\ (101 - 1) = 11300.$

La classe della C^{113} è pertanto:

$$113 \cdot 112 - D_2 - D_3 = 12656 - 12543 = 113$$

come doveva risultare, essendo la C^{113} una curva osculatrice di un ramo superlineare e quindi autoduale, e perciò con l'ordine eguale alla classe.

Si noti inoltre che avendo la C^{113}, nell'intorno del punto 12-plo A_{31} altri 8 punti di multiplicità 8, due punti di multiplicità 5 e due punti doppi posti in unico ramo di ordine 12, la singolarità straordinaria della C^{113} in A_3 si può ritenere come limite di

$$9 \frac{12(12-1)}{2} + 2\frac{5(5-1)}{2} + 2 = 594 + 20 + 2 = 616$$

punti doppi, fra cui $12 - 1 = 11$ cuspidali. Quindi l'equivalente pluckeriano della singolarità straordinaria della C^{113} in A_3, è costituito da 605 punti doppi nodali e 11 punti doppi cuspidali, e quindi determinanti nel loro complesso l'abbassamento della classe dato da:

$$2.605 + 3.11 = 1210 + 33 = 1243$$

che è precisamente il valore di D_3 calcolato sopra con la formola (15) della *proprietà* I) *sopra dimostrata indipendentemente della specifica conoscenza della distribuzione dei punti multipli della* C^{v+v} *negl' intorni del suo punto multiplo* A_3.

Si noti inoltre che l' *equivalente pluckeriano* [4]) [di 605 punti doppi nodali e 11 punti doppi cuspidali] è dato *indipendentemente dall' effettivo comportamento della polare del punto generico* Y *del piano nel punto multiplo* A_3, e tale equivalente ha dato lo stesso abbassamanto della classe calcolato direttamente con la multiplicità d'intersezione del ramo di origine A_3 con tale polare nel puntò A_3 che ci ha dato la formola (15).

Ma ora che conosciamo in tale esempio l' *effettivo comportamento della polare della* C^{113} *nel punto* A_3, studiato da B. Segre, e richiamato dal Vasentini [e cioè la polare del punto generico Y ha in ciascuno dei 9 punti di multiplicità 12 della C^{113} un punto di multiplicità 11, ed ha soltanto un altro punto in comune con la C^{113}; il primo dei due punti 5-pli, in cui detta polare ha un punto ancora di multiplicità 11], gli *effettivi punti comuni* alla C^{113} e alla polare dànno la multiplicità d'intersezione in A_3:

$$12.11.9 + 5.11 = 1243,$$

come già si era calcolata, indipendentemente dalla conoscenza dell' effettivo comportamento della polare in A_3 [col calcolo della multiplicità della radice $\rho = 0$ nell'equazione $F(\rho) = 0$ ottenuta sostituendo l'equazioni parametriche (12) del ramo nell'equazione (6) della polare, o col calcolo dell'equivalente pluckeriano di una singolarità straordinaria con la formola dimostrata nella teoria classica delle curve algebriche].

---

[4]) F. Enriguez - O Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* (Vol. II, pag. 446).

4. *Formole generali per il calcolo dei due equivalenti pluckeriani relativi alle due singolarità straordinarie della* $C^{v+v'}$.

Mantenendo le notazioni precedenti, posto anche $v = v_0$ e

$$(18)\quad \begin{cases} v' = v_0\, q_0 + v_1\,, & (0 < v_1 < v_0) \\ v_0 = v_1\, q_1 + v_2\,, & (0 < v_2 < v_1) \\ v_1 = v_2\, q_2 + v_3\,, & (0 < v_3 < v_2) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ v_{s-1} = v_s\, q_s + 1,\ (v_s = 1 \cdot q_{s+1}) & (0 < v_s < v_{s-1}),\ (v_{s+1} = 1)\ (q_{s+1} = v_s), \end{cases}$$

nel ramo di origine A_3, di ordine $v = v_0$ e di classe $v' > v_0$, dopo il punto v_0-plo A_3, seguono:

q_0 punti v_0-pli equivalenti a $q_0 \binom{v_0}{2}$ punti doppi

q_1 » v_1-pli » $q_1 \binom{v_1}{2}$ » »

. . . .

q_s » v_s-pli « $q_s \binom{v_s}{2}$ » » . [E $q_{s+1} = v_s$ punti semplici]

Eguale numero di punti doppi si ha in equivalenza ai punti multipli che seguono nel ramo di origine A_2 dopo il punto A_2 v'-plo.

Dei punti doppi seguenti A_3 sono da considerarsi cuspidali $v - 1$. Dei punti doppi seguenti A_3 sono da considerarsi cuspidali $v' - 1$. Segue che:

I) *L'equivalente pluckeriano della singolarità straordinaria della* $C^{v+v'}$ *in* A_3 *è dato da* d_3 *punti doppi nodali e* k_3 *punti doppi cuspidali,* con

$$(19)\quad \begin{cases} d_3 = \dfrac{1}{2}\left[(v-1)\,(v-2) + \displaystyle\sum_{j=0}^{j=s} q_j\, v_j\, (v_j - 1)\right] \\ k_3 = v - 1 \end{cases}$$

II) *L'equivalente pluckeriano della singolarità straordinaria della* $C^{v+v'}$ *in* A_2 *è dato da* d_2 *punti doppi nodali e* k_2 *punti doppi cuspidali,* con

$$(20)\quad \begin{cases} d_2 = \dfrac{1}{2}\left[(v'-1)\,(v'-2) + \displaystyle\sum_{j=0}^{j=s} q_j\, v_j\, (v_j - 1)\right] \\ k_2 = v' - 1. \end{cases}$$

Ne seguono le identità:

$$(21)\qquad D_3 = 2d_3 + 3k_3\,, \qquad D_2 = 2d_2 + 3k_2$$

[*con* D_3 *e* D_2 *dati dalla* (15) e (17)], *che permettono di calcolare gli abbassamenti della classe* D_3 *e* D_2, *anche mediante gli equivalenti pluckeriani* (19) e (20).

NOTA. — Nel caso della C^{113}, essendo $v' = 101$, $v = 12$ le (18) dànno:

$$\begin{aligned} 101 &= 12.8 + 5 \quad \text{e quindi} \quad v_0 = 12,\ q_0 = 8,\ v_1 = 5 \\ 12 &= 5.2 + 2 \quad\quad » \quad\quad v_1 = 5,\ q_1 = 2,\ v_2 = 2 \\ 5 &= 2.2 + 1 \quad\quad » \quad\quad v_2 = 2,\ q_2 = 2,\ v_3 = 1 \end{aligned}$$

In questo caso è quindi 3 l'indice della $v^2{}_{s+1}$ che risulta eguale ad 1, ed è perciò $s = 2$. Il sommatorio che si ha nelle (19) e (20) dà perciò:

$$\begin{aligned} \Sigma &= q_0\, v_0\, (v_0 - 1) + q_1\, v_1\, (v - 1) + q_2\, v_2\, (v_2 - 1) = \\ &= 8.12\,(12 - 1) + 2.5\,(5 - 1) + 2.2\,(2 - 1) = \\ &= 1056 + 40 + 4 = 1100. \end{aligned}$$

Segue che per le (20) (volendo calcolare D_2) si ha:

$$\begin{cases} d_2 = \frac{1}{2}\,[(101 - 1)\,(101 - 2) + 1100] = \frac{1}{2}\,(9900 + 1100) = \frac{1}{2}\,11000 \\ k_2 = 101 - 1 = 100 \end{cases}$$

e quindi si ha per le (21):

$$D_2 = 2d_2 + 3k_2 = 11000 + 300 = 11300$$

in concordanza con il calcolo di D_2 *mediante la formola* (17).

Segue inoltre che per le (19) (volendo calcolare D_3) si ha:

$$\begin{cases} d_3 = \frac{1}{2}\,[(12 - 1)\,(12 - 2) + 1100] = \frac{1}{2}\,(110 + 1100) = \frac{1}{2}\,1210 \\ k_3 = 12 - 1 = 11 \end{cases}$$

e quindi si ha per le (21):

$$D_3 = 2d_3 + 3k_3 = 1210 + 33 = 1243$$

in concordanza con il calcolo di D_3 *già fatto con la formola* (15).

5. *Equazioni parametriche dell'inviluppo delle tangenti alla* $C^{v+v'}$ *e dei due rami dell'inviluppo con la tangente origine in* a_3 *e* a_2.

Indicando con η_1, η_2, η_3 le coordinate di retta nel piano della $C^{v+v'}$, le coordinate della tangente alla $C^{v+v'}$ in un suo punto generico sono date dalle derivate prime della $f(x_1, x_2, x_3)$, cioè dalle (5), calcolate in tale punto (x_1, x_2, x_3) della curva. Queste coordinate sono a loro volta funzioni dei

due parametri omogenei ρ, σ date dalle (8) che rappresentano le equazioni parametriche della $C^{v+v'}$. Sostituendo le (8) nelle (5), dopo aver posto nei primi membri η_1, η_2 ed η_3 al posto delle derivate di f, si otterranno le equazioni parametriche dell' inviluppo delle tangenti alla $C^{v+v'}$ con i due parametri omogenei ρ e σ.

Sostituendo nelle η_j date dalle (5), anzichè le (8), le (12) che dànno le equazioni parametriche del ramo della $C^{v+v'}$ di origine A_3, si ottengono le equazioni parametriche del ramo della curva inviluppo avente per origine la retta $a_2 = A_2 A_1$ tangente al ramo in A_3. Eseguendo detta sostituzione e dividendo i secondi membri per il fattore comune $\rho^{(v+v')(v-1)}$, si hanno le equazioni:

$$(22) \qquad \eta_1 = (v + v')\, a\rho^{v'}, \qquad \eta_2 = vh^{v-1}, \qquad \eta_3 = v'\, h^v\, \rho^{v+v'}.$$

Analogamente sostituendo nelle η_j date dalle (5) le (13), che dànno le equazioni parametriche del ramo della $C^{v+v'}$ di origine A_2, si ottengono le equazioni parametriche del ramo della curva inviluppo avente per origine la retta $a_3 = A_2 A_1$ tangente al ramo in A_2. Eseguendo detta sostituzione, e dividendo i secondi membri per il fattore comune $\sigma^{(v+v')(v'+1)}$, si hanno le equazioni

$$(23) \qquad \eta_1 = (v + v')\, a\sigma^{v}, \qquad \eta_2 = vh^{v-1}\, \sigma^{v+v'}, \qquad \eta_3 = v'\, h^v$$

Raccogliendo si ha:

I) *Le* (22) *dànno le equazioni parametriche del ramo-inviluppo, con la retta origine nella retta* $a_2\,(0, 1, 0)$, *di classe* v' *e di ordine* v, *della* $C^{v+v'}$.

II) *Le* (23) *dànno le equazioni parametriche del ramo-inviluppo con la retta origine nella retta* $a_3\,(0, 0, 1)$, *di classe* v *e di ordine* v', *della* $C^{v+v'}$.

Si noti che fra le $v + v'$ rette tangenti alla $C^{v+v'}$ (di classe $v + v''$) uscenti da un generico punto $P'\,(x_1', 0, x_3')$ di $a_2\,(0, 1, 0)$, questa retta a_2 conta per v' tangenti, infatti intersecando il fascio di rette di centro P', di equazione

$$(24) \qquad x_1'\, \eta_1 + x_3'\, \eta_3 = 0$$

con il ramo-inviluppo di origine a_2, di equazioni parametriche (22), la radice $\rho = 0$ dell' equazione in ρ che si ottiene sostituendo le (22) nella (24) risulta con la multiplicità v', e a tale radice $\rho = 0$ risponde per le (22) precisamente la retta a_2, origine del ramo-inviluppo stesso. Sicchè: *per la* $C^{v+v'}$ *la retta* a_2 *è una tangente multipla con la multiplicità* v'. Si osservi inoltre che *essa è a contatto* $(v + v')$*-punto* perchè intersecando la $C^{v+v'}$ con $a_2 = A_3 A_1$ si ha il punto A_3 contato $v + v'$ volte.

Analogamente si ha che: *per la* $C^{v+v'}$ *la retta* a_3 *è una tangente multipla con la multiplicità* v, *a contatto* $(v + v')$*-punto, nel punto* A_2.

6. *La* V_3^N *di* S_5 *determinata dalla prima curva osculatrice di un ramo superlineare prolungata dal campo complesso al campo biduale. La falda* W_3.

Prolungando nel campo biduale la curva complessa $C^{v+v'}$ di equazione (4) si ha una curva biduale che risulta rappresentata, nel campo complesso, da una varietà dell' S_5 complesso, in cui si assumono come coordinate omogenee le sei variabili:

$$(x_1\,,\ y_1\,,\ x_2\,,\ y_2\,,\ x_3\,,\ y_3)\ , \tag{25}$$

dal sistema:

$$\left\{ \begin{aligned} & f(x_1\,,\ x_2\,,\ x_3) = 0 \\ & \frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} y_3 = 0\ , \end{aligned} \right. \tag{26}$$

cioè, nel caso della $C^{v+v'}$, dal sistema delle due equazioni (4) e (6).

Tale varietà risulta, pertanto, una V_3 di ordine $(v + v')^2$. In relazione alle proprietà generali già studiate per la varietà rappresentata dal sistema (26) [5], si ha che da tale V_3 di ordine $(v + v')^2$ si staccano, in corrispondenza ai due punti multipli A_3 e A_2, due spazi, diciamo $S_3(A_3)$ ed $S_3(A_2)$, contati, rispettivamente, D_3 e D_2 volte, con D_3 e D_2 date dalle formole (15) e (17) (oppure dalle (21)) che dànno l' abbassamento della classe determinato per la $C^{v+v'}$ rispettivamente da A_3 e da A_2. *La* V_3^N *residua di ordine:*

$$N = (v + v')^2 - D_3 - D_2 = 2\,(v + v')\ , \tag{27}$$

è irriducibile [essendo irriducibile la $C^{v+v'}$ che la determina], *ed è costituita da* ∞^1 *piani generatori rispondenti alle* ∞^1 *coppie* (P, t) *punto-retta tangente della* $C^{v+v'}$ *completa.*

Indicando con S_2 ed S_2' i due piani di S_5 costituiti dai punti di coordinate

$$(x_1\,,\ 0,\ x_2\,,\ 0,\ x_3\,,\ 0) \tag{28}$$

e

$$(0\,,\ y_1\,,\ 0,\ y_2\,,\ 0,\ y_3) \tag{29}$$

[5]) N. Spampinato, *Lezioni di Geometria superiore* (Voll. IX e X).

rispettivamente, ed indicando con w la proiettività fra S_2 ed S_2' in cui si corrispondono i punti (28) e (29) per $x_j = y_j$, il piano di S_5 rispondente alla coppia (P, t) punto-retta appartenentisi di S_2 è il piano $\pi = Pt'$ congiungente il punto P di S_2 con la retta t' omologa di t nella proiettività w fra S_2 ed S_2'. Ne segue che se P è un punto semplice della $C^{v+v'}$, supposta data nell' S_2 di S_5, e t la tangente a $C^{v+v'}$ in P, la retta t' omologa di t per la w, sarà la tangente t' alla C' di S_2', omologa per la w della C di S_2, nel punto P' omologo di P. Variando P in C la t' descriverà la curva inviluppo delle tangenti alla C', ed il piano $\pi = Pt'$, al variare di P in C, descriverà la varietà V_3^N. Se diciamo Q un altro punto di t distinto da P, alla retta $t = PQ$ corrisponderà in S_2' la retta $t' = P'Q'$ e quindi il piano π rispondente alla coppia (P, t) è il piano PP' Q'.

Facendo descrivere a P il ramo della $C^{v+v'}$ di equazioni parametriche (12) il punto P' deciderà il ramo di equazioni parametriche (assumendo in S_2' come coordinate le (y_1, y_2, y_3))

$$(12') \qquad y_1 = \rho^v, \qquad y_2 = h\rho^{v+v'}, \qquad y_3 = 1,$$

e la tangente al ramo nel punto P', rispondente ad un fissato valore di $\rho \neq 0$, è la retta t' congiungente P' con il punto, diciamo Q', avente per coordinate le derivate rispetto a ρ delle (12') calcolate nello stesso valore ρ fissato. Ne segue che il piano $\pi = Pt'$ è il piano che congiunge i tre punti di S_5

$$(30) \quad \begin{cases} P\,(\rho^v, & 0, & h\rho^{v+v'}, & 0, & 1, & 0) \\ P'(0, & \rho^v, & 0, & h\rho^{v+v'}, & 0, & 1) \\ Q'(0, & v\rho^{v-1}, & 0, & h(v+v)\,\rho^{v+v'-1}, & 1, & 0) \end{cases}$$

Di tale piano $\pi = PP'Q'$, rispondente al punto P del ramo (12) della $C^{v+v'}$, scriviamo le equazioni parametriche con due parametri non omogenei λ, μ, combinando linearmente le coordinate dei tre punti P, P', Q' date dalle (30) secondo i tre numeri (ρ, 1, μ). Si hanno le equazioni:

$$(31) \begin{cases} x_1 = \lambda\rho^v, & x_2 = h\lambda\rho^{v+v'}, & x_3 = \lambda \\ y_1 = \rho^v + v\mu\rho^{v-1}, & y_2 = h\rho^{v+v'} + h(v+v')\,\mu\rho^{v+v'-1}, & y_3 = 1. \end{cases}$$

Le (31) (per ρ fissato) sono le equazioni del piano $\pi = PP'Q'$ rispondente alla coppia (P, t) punto-retta tangente del ramo della $C^{v+v'}$ rispondente al valore ρ. Facendo variare tutti e tre i parametri ρ, λ, μ, le (31) dànno le equazioni parametriche della falda tridimensionale della V_3^N descritta dal piano PP' Q', al variare di P nel ramo della $C^{v+v'}$ di origine A_3. Abbiamo perciò:

I) *Alla prima curva osculatrice di un ramo di* S_2 *di ordine* v *e prima classe* v' *risponde in* S_5 *una varietà di ordine* $(v + v')^2$ *rappresentata dalla* (4). *Da tale varietà si staccano due spazi* $S_3(A_3)$ *ed* $S_3(A_2)$, *rispondenti ai due punti multipli della curva con multiplicità* D_3 *e* D_2, (*multiplicità complete di* A_3 *e* A_2). *La varietà residua* V_3^N, *di ordine* $N = 2(v + v')$, *somma dell'ordine e della classe della* $C^{v+v'}$, *è costituita da* ∞^1 *piani generatori* $\pi = Pt'$ *rispondenti alle coppie* (P, *t*) *della* $C^{v \cdot v'}$ *completa, con* t' *tangente a* C' *in* P' *essendo* C' *la omologa di* C *nella proiettività* w *fra* S_2 *ed* S_2'.

I') *Al ramo della* $C^{v+v'}$ *di origine* A_3 *risponde nella* V_3^N *la falda tridimensionale di equazioni parametriche* (31).

Si noti che:

II) *La falda tridimensionale* (31) *ha una prima origine nel punto* $A_3'(0, 0, 0, 0, 0, 1)$. *Una seconda origine nella retta* $A_3 A_3'$ *ed una terza origine nel piano* $A_3' A_3' A_1'$, *rispondente alla coppia punto retta* (A_3, a_2) *costituita dall'origine del ramo e dalla tangente all'origine* $a_2 = A_3 A_1$ *al ramo.*

Il punto A_3' è dato dalla ridotta di grado zero. La retta $A_3 A_3'$ è data dalla ridotta di grado 1. Il piano $A_3 A_3' A_1'$ è dato dalla prima ridotta bidimensionale che è la ridotta di grado v (ordine del ramo), infatti tale ridotta è: (essendo $v' > 1$)

$$(32) \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \quad , & y_2 = 0 \, , \quad x_3 = \lambda \\ y_1 = \rho^v + v\mu\rho^{v-1} \, , & y_2 = 0 \, , \quad y_3 = 1 \end{cases}$$

e rappresenta il piano $A_3 A_3' A_1'$ (contato v volte), di equazioni $x_1 = x_2 = y_2 = 0$.

Un'altra ridotta, quella di grado $v + 1$, dà *la prima ridotta tridimensionale* della falda (31). Essa ha le equazioni parametriche:

$$(33) \qquad \begin{cases} x_1 = \lambda\rho^v \quad , & x_2 = 0 \, , \quad y_3 = 1 \\ y_1 = \rho^v + v\mu\rho^{v-1} \, , & y_2 = 0 \, , \quad y_3 = 1 \end{cases}$$

e rappresenta l'S_3 congiungente la tangente $A_3 A_1$ al ramo nel punto origine con la retta omologa per la w nel piano S_2. Esso è pertanto l'S_3 tangente alla falda nel punto origine A_3' origine di tutti i rami naturali della falda rispondenti ai rami dell'$S_3(\rho, \lambda, \mu)$ euclideo con l'origine nel punto (0, 0, 0), e contenente le tangenti a tali rami naturali nel punto origine.

La prima successiva ridotta non coincidente con detto S_3 tangente è quella di grado $v + v'$, che dà la falda tridimensionale W_3, di equazioni parametriche:

$$(34)\begin{cases} x_1 = \lambda\rho \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad x_3 = \lambda , \\ y_1 = \rho^v + v\mu\rho^{v-1} , \quad y_2 = h\rho^{v+v'} + h(v+v')\,\mu\rho^{v+v'-1} , \quad y_3 = 1 . \end{cases}$$

III) *Questa falda W_3 costituisce la prima falda osculatrice della falda* (31) *della V_3^N nel suo piano origine $A_3\,A_2'\,A_1'$, contenuta nell' iperpiano $S_4 = A_3\,A_1\,S_2'$ congiungente la tanente $A_2\,A_1$ al ramo dato con il piano S_2'.*

Le (34) si ottengono combinando linearmente secondo i numeri $(\lambda, 1, \mu)$ i tre punti

$$(35)\begin{cases} M\,(\rho^v, & 0 & , 0, & 0 & , 1, & 0) \\ N'(0\ , & \rho & , 0, & h\rho^{v+v'} & , 0, & 1) \\ Q'(0\ , & v\rho^{v-1} & , 0, & h\,(v+v')\,\rho^{v+v'-1} & , 0, & 0) \end{cases}$$

e quindi :

IV) *la W_3 è costituita da ∞^1 piani $MN'Q'$, al variare del parametro ρ di cui sono funzioni le coordinate di M, N' e Q'.*

Al variare di ρ il punto M varia nel piano S_2 e precisamente nella retta $A_1\,A_3$ tangente alla $C^{v+v'}$ nel punto A_3 origine del ramo. Il punto N' descrive, nel piano S_2', la curva C' omologa della C per la proiettività w, e precisamente il ramo di C' omologo del ramo di C di equazioni parametriche (12). Essendo le coordinate di Q' le derivate delle coordinate di N', la retta $N'Q'$ è la tangente alla C' nel punto N'. Tale retta $t' = N'Q'$ descrive, in S_2', l' inviluppo, di classe $v + v'$, delle tangenti a C', quindi il piano S_2' appartiene alla W_3 con la multiplicità $v + v'$, dato che per un suo generico punto passano $v + v'$ rette tangenti alla C' e quindi $v + v'$ piani generatori della W_3. (Come per la V_3^N). Si noti inoltre che la retta $A_3\,A_1$ risulta appartenente alla W_3 con la multiplicità v, perchè per un punto $(m, 0, 1)$ di tale retta, in corrispondenza agli m valori di ρ dati dalle radici v-me di m, diciamo $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_v$ si hanno v piani generatori della W_3 rispondenti alle terne di punti (35), ponendo al posto di ρ i v valori $\rho_1, \ldots, \rho_v$, e quindi col primo punto di tali v terne coincidenti con M.

Ne segue che secando la W_3 con un S_3 passante per S_2' si ha una superficie spezzata nel piano S_2' contato $v + v'$ volte e negli v piani generatori uscenti dal punto M in cui la retta $A_3\,A_1$ è secata dall' S_3 considerata. L' ambiente della W_3 è l' iperpiano congiungente l' S_2' con la retta $A_3\,A_1$. Si ha perciò :

V) *La varietà W_3 di equazioni parametriche* (34), *costituente la prima falda osculatrice della V_3^N [considerata come falda di equazioni parametriche* (31)], *è di ordine $2v + v'$, con la retta $A_3\,A_1$ multipla, con la multiplicità v, ed il piauo S_2' multiplo, con la multiplicità $v + v'$.*

VI) *I v piani generatori della W_3 uscenti da un fissato punto* $M(m, 0, 1)$ *della retta multipla* $A_3 A_1$ *sono dati da* $MN_j' Q_j'$ $(j = 1, 2, .., v)$ *congiungenti le v terne di punti dati dalle* (35), *in corrispondenza agli m valori di ρ dati dalle m radici v-me della prima coordinata m di* M, $\rho_1, \rho_2, .., \rho_v$.

Le m rette $N_j' Q_j'$ *sono le tangenti alla C' del piano S_2' nei suoi v punti* N_j', *omologhi per la proiettività w, dei v punti N_j della $C^{v+v'}$ di coordinate :*

$$(36) \qquad N_j (\rho_j^{v'}, h\rho_j^{v \cdot v'}, 1) \qquad (j = 1, .., v)$$

Si noti che:

VII) *I v punti N_j dati dalla* (36) *sono i punti intersezione, fuori del punto v'-plo A_2, della $C^{v+v'}$ con la retta MA_2.*

Infatti questa retta ha l'equazione:

$$(37) \qquad x_1 - mx_3 = 0$$

che, per le equazioni parametriche (8) della $C^{v+v'}$, dà l'equazione:

$$(38) \qquad \rho^v \sigma^{v'} - m\sigma^{v+v'} = 0 ,$$

che si spezza nella $\sigma^{v'} = 0$, a cui corrisponde il punto A_2 contato v volte, e nell' equazione:

$$(34) \qquad \rho^v - m\sigma^v = 0 ,$$

a cui corrispondono i v punti (36). Segue che:

VII) *I v piani generatori della W_3 uscenti da un fissato punto* M *della tangente $A_3 A_1$ alla $C^{v+v'}$*, v-pla *per la W_3, sono dati da Mt_j' essendo t_j' le rette di S_2' omologhe per la proiettività w delle tangenti t_j alla $C^{v+v'}$ nei v punti N_j intersezioni fuori di A_2, della $C^{v+v'}$ con la retta MA_2.*

Facendo tendere il punto M, lungo la retta $A_3 A_1$, tangente v-pla alla $C^{v+v'}$, nel punto v-plo A_3, le v tangenti t_j alla $C^{v+v'}$ nei v punti N_j in cui è intersecata dalla retta MA_2, fuori del punto v'-plo A_2, tenderanno alla posizione limite $A_3 A_1$, e di conseguenza *i piani generatori Mt_j' della W_3 uscenti da M tenderanno al piano congiungente A_3 (posizione limite di* M), *con la retta $A_3' A_1'$ del piano S_2', posizione limite delle v rette t_j' di S_2' omologhe delle rette t_j per la proiettività w.*

Si avranno perciò v piani generatori della W_3, del tipo Mt_j' infinitamente vicini al piano $A_3 A_3' A_1'$, origine della falda W_3, con M nella retta $A_3 A_1$ infinitamente vicino ad A_3 in un intorno abbastanza elevato, *in modo che* M *non appartenga alla $C^{v+v'}$*, cioè non coincida con uno dei punti della $C^{v+v'}$ infinitamente vicini ad A_3, e posti sulla retta $A_3 A_1$, ma sia il

successivo all'ultimo fra tali punti posti sulla retta $A_3 A_1$ (indipendentemente da altri punti multipli che la $C^{v+v'}$ può eventualmente avere nell'intorno di A_3 e posti in rette del fascio di centro A_3 infinitamente vicine alla retta $A_3 A_1$ del fascio).

Si noti inoltre esplicitamente che:

IX) *I piani generatori della* V_3^N *che secano* S_2' *nelle* v *rette* t_j' *sono i* v *piani* $N_j t_j'$, *contenenti, rispettivamente, le* v *rette* $N_j N_j'$ *della rigata* W_2 *costituita dalle* ∞^1 *rette* $g = PP'$ *al variare di* P *nella* $C^{v+v'}$. *Tali* v *piani* $N_j t_j'$ *al tendere del punto* M *ad* A_3 *tendono pure* [*come i* v *piani* Mt_j' *della* W_3 *che oscula la* V^N] *al piano* $A_3 A_3' A_1'$.

NOTA. — Da quanto è sopra osservato segue la necessità di conoscere quali sono i punti della $C^{v+v'}$ posti nella tangente $A_3 A_1$ ed infinitamente vicini ad A_3, diciamo $A_3^{(1)}, A_3^{(2)}, \ldots$, ed il comportamento della polare C(Y) di un punto generico Y del piano rispetto alla $C^{v+v'}$ in tali punti. Di tale argomento ci occuperemo nel n. seguente e troveremo che, posto $v' = vq + v_1$, se risulta $q + v_1 \geqq v - 1$, la $C^{v+v'}$ e la C(Y) hanno in comune *solo* i punti che la $C^{v+v'}$ ha nella tangente $A_3 A_1$, determinanti solo essi nel complesso l'abbassamento D_3 della classe relativo al punto v-plo A_3. La C^{113} considerata nel n. 1 preciseremo che risponde a tal caso particolare.

7. *Comportamento della polare* C(Y) *nei punti della* $C^{v+v'}$ *posti nella tangente nel punto* v-plo A_3.

Andiamo a determinare quali sono i punti della $C^{v+v'}$ nella tangente $A_3 A_1$ nel suo punto v-plo A_3, ed il comportamento in tali punti della polare C(Y).

Intersechiamo la curva $C^{v+v'}$ di equazioni (4) e la polare del punto Y di equazione (6) con i rami di ordine 1 di equazioni:

$$(40) \quad \begin{cases} x_1 = \rho\,, & x_2 = \rho^2\,, & x_3 = 1 \\ x_1 = \rho\,, & x_2 = \rho^3\,, & x_3 = 1 \\ \cdot & \cdot\quad\cdot & \cdot \\ x_1 = \rho\,, & x_2 = \rho^{q+1}\,, & x_3 = 1 \\ x_1 = \rho\,, & x_2 = \rho^{q+2}\,, & x_3 = 1\,, \end{cases}$$

aventi tutti per origine A_3 e per tangente nell'origine la retta $A_3 A_1$ e appartenenti, rispettivamente, ad una $C^2, C^3, \ldots, C^{q+1}, C^{q+2}$ con un punto semplice in A_3 e la tangente $A_3 A_1$ a contatto, rispettivamente, bipunto, tripunto, .., $(q+1)$-punto e $(q+2)$-punto.

Sostituendo le (40) nella

$$(41) \qquad f(x_1, x_2, x_3) = x_2^v x_3^{v'} + a x_1^{v+v'},$$

si ottengono, rispettivamente (posto $v' = vq + v_1$):

$$(42) \quad \begin{cases} F_2(\rho) = \rho^{2v} + a\rho^{v+v'} = \rho^{2v}(1 + a\rho^{v'-v}) \\ F_3(\rho) = \rho^{3v} + a\rho^{v+v'} = \rho^{3v}(1 + a\rho^{v'-2v}) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F_{q-1}(\rho) = \rho^{(q+1)v} + a\rho^{v+v'} = \rho^{(q+1)v}(1 + a\rho^{v_1}) \\ F_{q+2}(\rho) = \rho^{(q+2)v} + a\rho^{v+v'} = \rho^{(q+1)v+v_1}(\rho^{v-v_1} + a). \end{cases}$$

Si ha perciò che le multiplicità d'intersezione in A_3 della $C^{v+v'}$ con le curve $C^2, C^3, \ldots, C^{q+1}, C^{q+2}$, sono, rispettivamente:

$$(43) \qquad 2v,\ 3v,\ \ldots,\ (q+1)v, \quad (q+1)v + v_1 = v + v',$$

e quindi *la* $C^{v+v'}$, *dopo il punto* v-plo A_3, *nella retta* $A_3 A_1$, *ha altri* q *punti* v-pli *successivi infinitamente vicini,* diciamo $A_3^{(1)}, \ldots, A_3^{(q)}$, *e un successivo punto* v_1 plo $A_3^{(q+1)}$ [che sarà il primo dei q_1 punti v_1-pli che la $C^{v+v'}$ ha dopo A_3 e gli altri q punti v-pli considerati nel n. 4 (dove s'è posto $v' = v_0 q_0 + v_1$ con $v = v_0$ e quindi $q_0 = q$ con la posizione $v' = v q + v_1$]. Così *s'è messo in evidenza quali dei punti successivi ad* A_3, *nel ramo della* $C^{v+v'}$ *di origine* A_3, *si trovano nella retta tangente* $A_3 A_1$. Sicchè la $C^{v+v'}$ ha in questa retta i $q+1$ punti v-pli $A_3, A_3^{(1)}, \ldots, A_3^{(q)}$ e il successivo punto v_1-plo $A_3^{(q+1)}$.

Essendo la somma delle multiplicità di tali punti $v + v'$ essi costituiscono il gruppo dei $v + v'$ punti intersezioni della $C^{v+v'}$ con la retta $A_3 A_1$, e quindi *il punto del ramo di origine* A_3 *successivo ad* A_3^{q+1} *sarà certamente fuori della retta* $A_3 A_1$.

Consideriamo ora la $C^{v+v'-1}(Y)$ polare rispetto alla $C^{v+v'}$ di un punto $Y(y_1, y_2, y_3)$ *fissato* genericamente nel piano della curva. Tale polare ha l'equazione

$$(44) \quad g(x_1, x_2, x_3) = a(v+v')\, y_1 x_1^{v+v'-1} + v y_2 x_2^{v-1} x_3^{v'} + v' y_3 x_2^v x_3^{v'-1}.$$

Essa ha in A_3 la multiplicità $v' - 1$. Secandola con la conica C^2 avente per equazioni parametriche le prime delle (40), si ha dopo la sostituzione un polinomio $G_0(\rho)$ dato da:

$$(45) \qquad G(\rho) = a(v+v')\, y_1 \rho^{v+v'-1} + v y_2 \rho^{2(v-1)} + v' \rho^{2v} =$$
$$= \rho^{2(v-1)}(v y_2 + \ldots)$$

e quindi la multiplicità d'intersezione della $C(Y)$ con la C^2 in A_3 è $2(v-1)$, cioè la $C(Y)$ ha nel punto $A_3^{(1)}$, successivo ad A_3 nella retta $A_3 A_1$, la multiplicità $v-1$, come in A_3. Secando successivamente, $C(Y)$ con la $C^3, \ldots, C^{q+1}$ di equazioni (40) (ultima esclusa relativa alla C^{q+2}) si hanno in A_3 rispettivamente le multiplicità d'intersezione:

$$(46) \qquad 3(v-1), \ldots, (q+1)(v-1),$$

ed essendo

$$(q+1)(v-1) < v + v' - 1$$

si accertano nella retta $A_3 A_1$ i $q+1$ punti $(v-1)$-pli $A_3, A_3^{(1)}, \ldots, A_3^{(q)}$ per la $C(Y)$, punti che appartengono alla $C^{v\,v'}$ con la multiplicità v.

Essendo $v' = vq + v_1$ si ricava:

$$(47) \qquad (v + v' - 1) - (q+1)(v-1) = (v + vq - v_1 - 1) - (qv + v - q - 1) = v_1 + q$$

e quindi la $C(Y)$ deve avere nella retta $A_3 A_1$, oltre ai punti $A_3, A_3^{(1)}, \ldots, A_3^{(q)}$, complessivamente altri $v_1 + q$ punti.

Sechiamo ora la $C(Y)$ con la C^{q+2} avente per equazioni parametriche l'ultima della (40) che è servita a mettere in evidenza l'esisistenza nella $C^{v\,v'}$ del primo punto v_1-plo $A_3^{(q+1)}$, successivo ad $A_3^{(q)}$ e posto nella retta $A_3 A_1$. In questo caso la multiplicità d'intersezione della $C(Y)$ con la C^{q+2} è data dalla multiplicità della radice $\rho = 0$ nell'equazione

$$(48) \qquad a(v+v')\, y_1\, \rho^{v+v'-1} + v y_2\, \rho^{(q+2)(v-1)} + v'\, \rho^{(q+2)v}.$$

Tale multiplicità d'intersezione è data perciò dal minore dei due interi

$$(49) \qquad v + v' - 1 \quad \text{e} \quad (q+2)(v-1).$$

Tenendo conto della (47) si ricava che la differenza fra i due interi (49) è

$$(50) \qquad (v + v' - 1) - (q+2)(v-1) = (v_1 + q) - (v-1).$$

Se è $v_1 + q \geqq v - 1$ la C^{q+2} ha con la $C(Y)$ la multiplicità d'intersezione $(q+2)(v-1)$ e il punto $A_3^{(q+1)}$, v_0-plo per la $C^{v\,v'}$, risulta per la $C(Y)$, $(v-1)$-plo come i precedenti $A_3, \ldots, A_3^{(q)}$. In tal caso la $C^{v\,v'}$ e la polare $C(Y)$ nei punti $A_3, \ldots, A_3^{(q+1)}$ hanno in comune:

$$(51) \qquad v(v-1)(q+1) + v_1(v-1) = \big(v(q+1) + v_1\big)(v-1) = (vq + v_1 + v)(v-1) = (v+v')(v-1) = D_3$$

pnnti e quindi nell' intorno di A_3 la $C^{v+v'}$ e la $C(Y)$ non avranno altri punti in comune, essendo D_3 la multiplicità d' intersezione della $C^{v+v'}$ e della $C(Y)$ in A_3, e costituendo l' abbassamento della classe determinato da A_3 per la $C^{v+v'}$, già calcolato nel n. 3. Si ha perciò:

I) *Se è* $v_1 + q \geqq v - 1$, *la curva* $C^{v+v'}$ *e la polare* $C^{v+v'-1}(Y)$ *hanno in comune nell' intorno del punto multiplo* A_3 *tutti e soli i punti che la curva ha nella retta* $A_3 A_1$, *e precisamente, i punti* A_3 *e successivi* $A_3^{(1)}, \ldots, A_3^{(q+1)}$, *che sono tutti* $(v - 1)$-pli *per la polare, e* v-pli, *escluso l' ultimo che è* v_1-plo, *per la* $C^{v+v'}$.

Nel seguito quando è soddisfatta la disuguaglianza

$$v_1 + q \geqq v - 1 \tag{52}$$

fra gl' interi positivi v, v_1 e q diciamo che la curva $C^{v+v'}$, con $v' = vq + v_1$ $(v_1 < v)$ presenta il *caso minimo* nel punto A_3 per ricordare che in tal caso la $C^{v+v'}$ e la polare $C(Y)$ hanno in comune nell' intorno del punto multiplo A_3, di multiplicità v, *solo* i punti che la $C^{v+v'}$ ha nella tangente $A_3 A_1$ alla $C^{v+v'}$ in A_3.

NOTA I. — *Per* $v = 2$ *o* $v = 3$ *la* (52), *essendo* v_1 *e* q *positivi, è sempre soddisfatta* e quindi si ha il *caso minimo*. In particolare per $v_1 = 1$, $q = 1$, e quindi $v' = vq + v_1 = 3$, si ha una C^5 di equazione

$$x_2^2 x_3^3 + a x_1^5 = 0 \tag{53}$$

avente nella retta $A_3 A_1$ tangente nel punto doppio A_3 un punto doppio successivo A_3^{1}, seguito da un punto semplice A_3^{2}. La polare $C^4(Y)$ ha un punto semplice in ciascuno di tali tre punti e quindi è $D_3 = 5$ l' abbassamento della classe prodotto da A_3, come risulta pure dalla formola $D_3 = (v + v')(v - 1)$.

In questo caso l' abbassamento della classe prodotto dal punto triplo A_2 è dato da $D_2 = (v + v')(v - 1) = 5 . 2 = 10$, e quindi la classe della C^5 è data da

$$m = n(n - 1) - D_2 - D_3 = 5 . 4 - 10 - 5 = 5 \tag{54}$$

a conferma che la C^5 è autoduale.

NOTA II. — Anche *la* C^{113} *considerata nel* n. 1, *presenta il caso minimo*. Infatti essendo in tal caso $v = 12$, $v' = 101$, $q = 8$, $v_1 = 5$ risulta $v_1 + q = 13$ e $v - 1 = 11$ e quindi la condizione (52) è soddisfatta. Si ha perciò il caso in cui la curva C^{113} e la polare $C^{112}(Y)$ hanno in comune nell' intorno del punto multiplo A_3 *solo* i punti che la C^{113} ha nella tangente $A_3 A_1$, e precisamente i punti successivi $A_3 A_3^{(1)}, \ldots, A_3^{(9)}$. Tali

punti per la C^{113} sono i primi nove tutti di multiplicità $v = 12$; l'ultimo $A_3^{(9)}$ è di multiplicità $v_1 = 5$. Per la polare C^{112} (Y) sono invece tutti di multiplicità $v - 1 = 11$. Essi pertanto assorbono un numero di punti d'intersezione dato da:

$$(55) \qquad 9 . 12 . 11 + 5 . 11 = 1243 = D_3$$

che è l'abbassamento della classe determinato da A_3, già calcolato, con la formola (15) ed anche con l'equivalente pluckeriano relativo a detto punto singolare A_3, nel n 4.

8. *Tangenti alla* $C^{v+v'}$ *infinitamente vicine alla tangente multipla* $A_3 A_1$.

La retta $a_2 = A_3 A_1$, di coordinate (1, 0, 1), come abbiamo già osservato nel n 5, è multipla per la $C^{v+v'}$ con la multiplicità v', classe del ramo inviluppo di equazioni parametriche (22), avente per origine la tangente a_3. E' bene precisare quali sono i punti di contatto delle v' tangenti alla $C^{v+v'}$ che si sovrappongono alla a_2, quali sono le tangenti semplici alla $C^{v+v'}$ infinitamente vicine alla tangente multipla a_2 e quali sono i punti di contatto di tali tangenti semplici. Ciò al fine di poter precisare qual'è la situazione di piani generatori della V_3^N dell'S_5 infinitamente vicini o appartenenti all'S_3 (A_3) che si è staccato dalla varietà di ordine $(v + v')^2$ rappresentata dal sistema (26) con la multiplicità D_3 (multiplicità completa di A_3 per la $C^{v+v'}$ (Proporzione I) del n. 6).

Mantenendo le notazioni del n. precedente, essendo i punti A_3, $A_3^{(1)}$, ... , $A_3^{(q)}$ della retta $a_2 = A_3 A_1$ punti tutti v-pli per la $C^{v+v'}$, la retta $A_3 A_3^{(1)}$ risulta tangente v-pla alla curva in A_3, e se è $q > 1$, la retta $A_3^{(1)} A_3^{(2)}$ risulta tangente v-pla alla curva in $A_3^{(1)}$, la retta $A_3^{(2)} A_3^{(3)}$ risulta tangente v-pla alla curva in $A_3^{(2)}$ e così via di seguito, fino alla retta $A_3^{(q-1)} A_3^{(q)}$ che risulta tangente v-pla alla curva in $A_3^{(q-1)}$. Si hanno così, intanto, q tangenti v-ple che si sovrappongono alla tangente $a_2 = A_3 A_1$.

Consideriamo ora il successivo punto $A_3^{(q+1)}$ della retta a_2, che è v_1-plo per la $C^{v+v'}$. La retta $A_3^{(q)} A_3^{(q+1)}$ risulterà v-pla per la curva col punto di contatto in $A_3^{(q)}$. Il punto successivo $A_3^{(q+2)}$ della retta a_2 non appartiene alla $C^{v+v'}$. Le tangenti già determinate che si sovrappongono alla a_2 sono $vq + v_1 = v'$, multiplicità della tangente a_2.

Intanto si ha:

I) *La retta* $a_2 = A_3 A_1$, *tangente multipla della* $C^{v+v'}$ *con la multiplicità* v', *risulta la sovrapposizione di* q *tangenti* v-ple *aventi, rispettivamente il punto di contatto nei* q *punti* v-pli $A_3, A_3^{(1)}, \ldots, A_3^{(q-1)}$, *e di una tangente* v_1-pla *avente il punto di contatto nell'ultimo punto* v-plo $A_3^{(q)}$ (*seguito dal punto* v_1-plo $A_3^{(q+1)}$ *posto in* a_2).

Andiamo ora a determinare le altre $v - v_1$ tangenti alla $C^{v+v'}$ col

punto di contatto nel suo ultimo punto v-plo $A_3^{(q)}$, e le v_1 tangenti aventi il punto di contatto nel punto v_1-plo $A_3^{(q+1)}$. A tal fine nel fascio di centro A_2 consideriamo le rette successive $a_1, a_1^{(1)}, \ldots, a_1^{(q)}, a_1^{(q+1)}$ che si ottengono proiettando da A_2 i punti $A_3, A_3^{(1)}, \ldots, A_3^{(q)}, A_3^{(q+1)}$ della retta a_2. Essendo A_2 di multiplicità v' nelle rette congiungenti A_2 con i punti v-pli $A_3, \ldots, A_3^{(q)}$ non vi saranno altri punti della $C^{v+v'}$. Nella retta successiva $a_1^{(q+1)} = A_2 A_3^{(q+1)}$, essendo $A_3^{(q+1)}$ v_1-plo, vi saranno altri $v - v_1$, *infinitamente vicini* ad $A_3^{(q+1)}$, che insieme a questo punto costituiranno il gruppo dei v punti in cui la $C^{v+v'}$ e secata, fuori di A_2, dalla retta $a_1^{(q+1)}$, e che congiunti col punto $A_3^{(q)}$ daranno, oltre alla retta a_2 v_1-pla, le altre $v - v_1$ tangenti alla $C^{v+v'}$ col punto di contatto in $A_3^{(q)}$. Si ha perciò :

II) *Le altre $v - v_1$ tangenti alla $C^{v+v'}$ col punto di contatto in $A_3^{(q)}$ sono le $v - v_1$ rette del fascio di centro $A_3^{(q)}$ successive alla retta a_2, che si ottengono proiettando da $A_3^{(q)}$ i $v - v_1$ punti in cui la $C^{v+v'}$ è secata, fuori di A_2 e $A_3^{(q+1)}$, dalla retta $a_1^{(q+1)}$ che congiunge tali due punti.*

Consideriamo ora la successiva retta $a_1^{(q+2)}$, proiettante da A_2 il successivo punto $A_3^{(q+2)}$ della retta a_2, che è il primo punto successivo ad A_3 della a_2 che non appartiene alla $C^{v+v'}$. La $a_1^{(q+2)}$ intersecherà la $C^{v+v'}$ in v punti successivi ai v punti in cui è secata dalla retta precedente $a_1^{(q+1)}$, [cioè al punto v_1-plo $A_3^{(q+1)}$ e agli altri $v - v_1$ punti sopra considerati]. Se diciamo $P_1, \ldots, P_{v_1+1}, \ldots, P_v$ tali punti successivi ad $A_3^{(q+2)}$ nella retta $a_1^{(q+2)}$, e $Q_1, \ldots, Q_{v-v_1}$ i punti successivi ad $A_3^{(q+1)}$ nella retta precedente $a_1^{(q+1)}$ (sopra considerati) le rette congiungenti $A_3^{(q+1)}$ con $P_1, \ldots, P_{v_1}$ saranno le tangenti alla $C^{v+v'}$ col punto di contatto nel suo punto v_1-plo $A_3^{(q+1)}$, e le rette $Q_1 P_{v_1+1}, \ldots, Q_{v-v_1} P_v$, saranno le tangenti alla $C^{v+v'}$ nei punti $Q_1, \ldots, Q_{v-v_1}$. Si ha perciò:

III) *Le v tangenti alla $C^{v+v'}$ nel suo punto v_1-plo $A_3^{(q+1)}$ sono le rette del fascio di centro $A_3^{(q+1)}$, successive alla retta a_2, congiungenti $A_3^{(q+1)}$ con i primi v_1 punti $P_1, \ldots, P_{v_1}$ fra i v punti successivi ad $A_3^{(q+2)}$ in cui la $C^{v+v'}$ è secata, fuori di A_2, della retta $A_2 A_3^{(q+2)} = a_1^{(q+2)}$*

Tenendo conto delle proposizioni II) e III) si ha:

IV) *La $C^{v+v'}$ ammette v tangenti infinitamente vicine alla tangente v-pla a_2, col punto di contatto in a_2, e precisamente: $v - v_1$ col punto di contatto dell'ultimo punto $A_3^{(q)}$ v-plo, e le altre v_1 col punto di contatto nel successivo punto $A_3^{(q+1)}$ v_1-plo. (Ultimo dei punti che la $C^{v+v'}$ ha sulla $A_3 A_1 = a_2$ successivi ad A_3).*

Si noti esplicitamente che: sia nel primo gruppo di $v - v_1$ tangenti, se è $v - v_1 > 1$, sia nel secondo gruppo di v_1 tangenti, se è $v_1 > 1$, vi possono essere tangenti multiple; ciò si verifica quando la $C^{v+v'}$ ammette

qualche punto multiplo *fuori di* a_2 nell'intorno del prim'ordine di $A_3^{(q)}$ o nell'intorno del prim'ordine di $A_3^{(q+1)}$.

9. *Piani generatori della* V_3^N *di* S_5 *appartenenti al fascio avente per asse la retta* a_2' *di* S_2' *tangente multipla della* C', *ed infinitamente vicini a questi.*

Riprendendo la V_3^N di S_5 considerata nel n. 6, tenendo conto delle proposizioni del n. precedente si ha che:

I) *Congiungendo la retta* a_2' v'-pla *per la curva* C' *di* S_2', *omologa della* $C^{v+v'}$ *di* S_2 *nella proiettività* w, *con i punti* $A_3, A_3^{(1)}, \ldots, A_3^{(q)}, A_3^{(q+1)}$ *si ottengono* $q+1$ *piani* v-pli, *e l'ultimo* v_1-plo, *della* V_3^N, *appartenenti al fascio di asse* a_2' *nell'* $S_3 = a_2\, a_2'$.

II) *Infinitamente vicini all'ultimo piano* v-plo $A_3^{(q)}\, a_2'$, *la* V_3^N *ammette* $v - v_1$ *piani generatori nel fascio di asse* $g^{(q)}$, *congiungente* $A_3^{(q)}$ *col punto omologo in* w. *Infinitamente vicini al piano* v_1-plo $A_3^{(q+1)}\, a_2'$, *la* V_3^N *ammette* v_1 *piani generatori nel fascio di asse* $g^{(q+1)}$ *congiungente* $A_3^{(q+1)}$ *con il punto omologo in* w.

Tali due gruppi di piani generatori secano in S_2' *i due gruppi di tangenti alla* C' *infinitamente vicine alla retta tangente* v'-pla a_2' *nei punti di appoggio delle due generatrici* $g^{(q)}$ *e* $g^{(q+1)}$ *della rigata* W_2 (*costituita dalla* ∞^1 *rette* $g = PP'$ *al variare di* P *nella* $C^{v+v'}$).

Si noti esplicitamente che i $q+1$ piani della V_3^N considerati nella proposizione I) appartengono, rispettivamente, ai fasci aventi per assi le generatrici $g, g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots, g^{(q)}, g^{(q+1)}$ della rigata W_2 passanti per $A_3, A_3^{(1)}, \ldots, A_3^{(q)}, A_3^{(q+1)}$, e quindi appartengono agli S_3 che si ottengono proiettando tali punti da S_2'. Il primo di tale S_3 è l' $S_3(A_3)$ che si è staccato dalla V_3 di equazioni (26) con la multiplicità complessiva data dall'abbassamento della classe D_3 determinato per le $C^{v+v'}$ dal punto multiplo A_3. Ora *in tale abbassamento intervengono, insieme ad* A_3 *i successivi punti multipli* $A_3^{(1)}, \ldots, A_3^{(q+1)}$, per la proposizione I) del n. 7), si può precisare, perciò, che si staccano dalla V_3 suddetta, insieme ad $S_3(A_3)$, gli S_3 infinitamente vicini a questo proiettanti da S_2' i successivi punti multipli appartenenti pure alla polare $C(Y)$, ciascuno contato tante volte quant'è il prodotto delle due multiplicità che esso ha per la $C^{v+v'}$ e per la $C(Y)$. La varietà V_3^N ha $q+1$ piani multipli suddetti distribuiti in tali S_3 ambienti dei fasci di piani sopra considerati (fasci di piani che si possono considerare determinati in S_5 dai fasci di rette di S_2 col centro nei punti multipli $A_3, A_3^{(1)}, \ldots, A_3^{(q+1)}$ della $C^{v+v'}$, completa, e quindi staccati dalla curva inviluppo completa con le multiplicità date dai rispettivi abbassamenti della classe determinati da detti punti multipli).

NOTA. — Quando la $C^{v+v'}$ presenta il *caso minimo* (n. 7) dalla V_3 di equazioni (26) in dipendenza di A_3 si staccano *solo* gli S_3 proiettanti da S_2' i punti che la $C^{v+v'}$ ha nella tangente $A_3 A_1$ nell' origine A_3 del ramo, cioè i $q+1$ punti v-pli $A_3, A_3^{(1)}, \ldots, A_3^{(q)}$, e il punto v_1-plo $A_3^{(q+1)}$.

E' bene notare che *tale caso dipende dal numero* $q+1$ *di tali punti* v-pli, perchè la condizione (52) che dà il caso minimo, si può mettere sotto la forma

$$(52') \qquad q+1 \geqq v - v_1 ,$$

si ha cioè:

I) *Il caso minimo si presenta quando e solo quando la* $C^{v+v'}$ *ha nella tangente* $A_3 A_1$ *nel punto* A_3 *almeno* $v - v_1$ punti v-pli $A_3, A_3^{(1)}, \ldots, A_3^{(q)}$ *infinitamente vicini.*

Nei riguardi della V_3^N si ha:

II) *Il caso minimo si presenta quando la* V_3^N *ha nel fascio di piani di asse* a_2' *dell'* $S_3 = a_2 a_2'$, *almeno* $v - v_1$ *piani generatori* v*-pli* $a_2' A_3$, $a_2' A_3^{(1)}, \ldots$ *infinitamente vicini.*

Sulla prima curva osculatrice di un ramo superlineare di una curva algebrica piana completa

Nota II del socio ordinario **Nicolò Spampinato**

(Pervenuta all' Accademia il dì 26 agosto 1957)

Sunto. — Si determina l'effettivo comportamento della polare della $C^{v+v'}$ nei punti multipli posti nell'intorno dell'origine A_2 del secondo ramo superlineare della $C^{v+v'}$. Si determina l'equazione della $C^{v+v'}$ nel caso che presenta il *caso minimo* in entrambi i punti origine dei due rami superlineari. Si determinano infine le tangenti alla $C^{v+v'}$ infinitamente vicine alla tangente nel punto origine per ciascuno dei due rami, mettendo in evidenza come tali due rami *completi* sono l'uno duale dell'altro, per la curva *autoduale* $C^{v+v'}$.

10. *Comportamento della polare* C(Y) *nei punti multipli della* $C^{v+v'}$ *posti nell'intorno del prim'ordine del punto multiplo* A_2. *Relativo caso minimo.*

Nella tangente $a_3 = A_2 A_1$ nel punto v'-plo A_2 la $C^{v+v'}$ ha il primo punto v-plo nel punto $A_2^{(1)}$, infinitamente vicino ad A_2. Se è $q > 1$ gli altri successivi punti v-pli della curva, posti nell'intorno di A_2, appartengono alle rette del fascio di centro A_2, successive alla retta $a_3 = A_2 A_1$ e che indicheremo con $a_3^{(2)}$, $a_3^{(3)}$ . . . $a_3^{(q)}$, ponendo anche $a_3^{(1)} = a_3$. Tali punti successivi li indicheremo con $A_2^{(1)}$, $A_2^{(2)}$, . . . , $A_2^{(q)}$. Per verificare l'esistenza di tali punti multipli, nell'intorno del prim'ordine di A_2, basta intersecare la $C^{v+v'}$ successivamente con le curve C^2, C^3, . . . , C^{q+1} di equazioni parametriche, rispettivamente:

$$x_1 = \sigma \ , \quad x_2 = 1 \ , \quad x_3 = \sigma^2 \tag{56}$$

$$x_1 = \sigma^2 \ , \quad x_2 = 1 \ , \quad x_3 = \sigma^3 \tag{57}$$

. . . .

$$x_1 = \sigma^q \ , \quad x_2 = 1 \ , \quad x_3 = \sigma^{q+1}. \tag{58}$$

Tali curve hanno in A_2, rispettivamente, la multiplicità 1, 2, . . . , q [con la tangente $A_2 A_1$ a contatto bipunto, tripunto, . . . , $(q+1)$-punto), sicchè la c^2 contiene $A_2^{(1)}$, la c^3 contiene $A_2^{(1)}$ e $A_2^{(2)}$, . . . , e la C^{q+1} contiene $A_2^{(1)}$ e $A_2^{(2)}$, . . . , $A_2^{(q)}$.

Sostituendo tali equazioni parametriche nell' equazione

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2^v x_3^{v'} + a x_1^{v+v'} = 0 \tag{59}$$

della $C^{v+v'}$ (con $v' = qv + v_1$) si hanno delle equazioni che ammettono la radice $\sigma = 0$, rispettivamente, con la multiplicità $v + v'$, $2(v + v')$, ... , $q(v + v')$, e tenendo conto che A_2 assorbe, successivamente, v', $2v'$, . . . , qv' delle intersezioni [essendo v'-plo per la $C^{v+v'}$ e semplice, doppio, ... , q-plo, per le successive curve] risulta che il punto $A_2^{(1)}$, e, successivamente, $A_2^{(2)}$, . . . , $A_2^{(q)}$, sono tutti v-pli per la $C^{v+v'}$. Si ha perciò :

I) *Il gruppo dei q punti v pli della $C^{v+v'}$ infinitamente vicini ad A_2, $(vq + v_1)$-plo per la $C^{v+v'}$, sono i punti $A_2^{(1)}$, . . . , $A_2^{(q)}$ dell' intorno del prim' ordine di A_2, posti nelle q rette del fascio di centro A_2: $a_3^{(1)} = A_2 A_1$, $a_3^{(2)}$, . . . , $a_3^{(q)}$ infinitamente vicine e successive.*

Tali punti fanno quindi parte della *retta infinitesima* costituita dall' intorno del prim' ordine di A_2.

Sechiamo ora la $C^{v+v'}$ con la C^{q+2} di equazioni parametriche

$$x_1 = \sigma^{q+1}, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = \sigma^{q+2} \tag{60}$$

avente in A_2 un punto $(q+1)$-plo [con la tangente $A_2 A_1$ a contatto $(q+2)$-punto] e quindi contenente nell' intorno del prim' ordine di A_2, oltre i punti $A_2^{(1)}$, . . . , $A_2^{(q)}$, anche il successivo punto $A_2^{(q+1)}$. Sostituendo le (60) nella (59) si ha che la multiplicità d' intersezione della $C^{v+v'}$ con la C^{q+2}, data dalla radice $\sigma = 0$ nell' equazione

$$F(\sigma) = \sigma^{(q+2)v'} + a\sigma^{(q+1)(v+v')}, \tag{61}$$

è data dall' esponente $(q+2)v'$ della prima potenza di σ che risulta minore dell' esponente della seconda potenza (invece nei casi precedenti risultava minore l' esponente della seconda potenza). Ne segue che il punto $A_2^{(q+1)}$ ha per la $C^{v+v'}$ la multiplicità v_1, differenza fra $(q+2)v'$ e la somma delle intersezioni assorbite dai punti A_2, $A_2^{(1)}$, . . , $A_2^{(q)}$ cioè $v'(q+1) + vq$. Si ha perciò :

II) *La $C^{v+v'}$ nel successivo punto $A_2^{(q+1)}$ dell' intorno del prim' ordine di A_2, ai q punti v-pli $A_2^{(1)}$, . . , $A_2^{(q)}$, ha un punto v_1-plo.*

Tale punto sarà il primo dei punti v_1-pli che la $C^{v+v'}$ deve avere infinitamente vicini ad A_2. Esso appartiene alla retta $a_3^{(q+1)}$ successiva alla $a_3^{(q)}$ nel fascio di centro A_2.

Ricordando la posizione $v = v_1 q_1 + v_2$, si ha che è q_1 il numero di punti v_1-pli, di cui il primo è $A_2^{(q+1)}$. Se è $q_1 > 1$ i seguenti $q_1 - 1$ punti v_1-pli del ramo di origine A_2 li indicheremo con $A_2^{(q+2)}$, . . , $A_2^{(q+q_1)}$. Ab-

biamo già notato che il punto $A_2^{(q+1)}$, primo dei punti v_1-pli, appartiene all'intorno del prim'ordine di A_2, successivo al punto v-plo $A_2^{(q)}$, e quindi posto nella retta $a_3^{(q+1)}$ successiva alla retta $a_3^{(q)}$, a cui appartiene $A_2^{(q)}$, nel fascio di rette di centro A_2. Ebbene faremo vedere che anche i seguenti punti v_1-pli si trovano nella retta $a_3^{(q+1)}$. A tal fine sechiamo la $C^{q+q'}$ con la curva di equazioni parametriche

$$(62) \qquad x_1 = \sigma^{2q+1}, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = \sigma^{2q+3}.$$

Questa curva C^{2q+3} ha in A_2 un punto $(2q+1)$-plo, nei successivi punti $A_2^{(1)}, \ldots, A_2^{(q)}$ un punto doppio, e due punti semplici in $A_2^{(q+1)}$ e nel successivo a questo $A_2^{(q+2)}$ posto nella retta $a_3^{(q+1)}$. Sostituendo le (62) nella (59) si ha che la multiplicità d'intersezione della $C^{v+v'}$ con questa C^{2q+3} è $(2q+3)\,v'$. Tenendo conto che A_2 assorbe $(2q+1)\,v'$ intersezioni, i q seguenti punti $A_2^{(1)}, \ldots, A_2^{(q)}$ ne assorbono, $2vq$, ed il punto $A_2^{(q+1)}$ ne assorbe v_1, segue che anche $A_2^{(q+2)}$ è v_1-plo per la $C^{v+v'}$, perchè si ha:

$$(63) \qquad (2q+3)\,v' - (2q+1)\,v' - 2qv - v_1 = 2v' - 2qv - v_1 = \\ = 2\,(vq + v_1) - 2qv - v_1 = v_1 .$$

Sechiamo ora la $C^{v+v'}$ con la curva di equazioni parametriche:

$$(64) \qquad x_1 = \sigma^{3q+1}, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = \sigma^{3q+4}.$$

Questa curva ha in A_2 un punto $(3q+1)$-plo, nei q punti $A_2^{(1)}, \ldots, A_2^{(q)}$ la multiplicità 3, e tre punti semplici nella retta $a_3^{(q+1)}$, nei punti $A_2^{(q+1)}$, $A_2^{(q+2)}$ e successivo punto $A_2^{(q+3)}$. Sostituendo le (64) nella (59) si ricava che la multiplicità d'intersezione della $C^{v+v'}$ con la C^{3q+4} è data, se è $q_1 > 2$, da $(3q+4)\,v'$. Tenendo conto che A_2 assorbe $(3q+1)\,v'$ intersezione, i q seguenti punti $A_2^{(1)}, \ldots, A_2^{(q)}$ assorbono $3vq$ intersezioni, ed i due punti $A_2^{(q+1)}$ e $A_2^{(q+2)}$ assorbono $2v_1$, segue che anche il successivo punto $A_2^{(q+3)}$, terzo punto semplice che la C^{3q+4} ha nella retta $a_3^{(q+1)}$, è pure v_1-plo per la $C^{v+v'}$. Così proseguendo si dimostra, secando la $C^{v+v'}$ con curve di equazioni del tipo (60), (62), (64), cioè del tipo

$$(65) \qquad x_1 = \sigma^{hq+1}, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = \sigma^{hq+h+1}$$

con $h = 1, 2, 3, \ldots, q_1$, che:

III) *La* $C^{v+v'}$ *nella retta* $a_3^{(q+1)}$ *del fascio di centro* A_2 [*successiva alle rette* $a_3^{(1)} = A_2 A_1$, $a_3^{(2)}, \ldots, a_3^{(q)}$, *contenenti i* q *punti* v-pli $A_2^{(1)}, \ldots$ $\ldots, A_2^{(q)}$, *dell'intorno del prim'ordine di* A_2], *ha i* q_1 *punti* v_1-pli $A_2^{(q+1)}, \ldots, A_2^{(q+q_1)}$.

Sicchè, dopo il primo gruppo di q punti v-pli, $A_2^{(1)}, \ldots, A_2^{(q)}$, appartenenti alla *retta* (*infinitesima*) costituita dall'intorno di A_2, il seguente

gruppo di q_1 punti v_1-pli, $A_2^{(q+1)}, \ldots, A_2^{(q+q_1)}$, appartiene pure ad una *retta*, del fascio di centro A_2.

Andiamo ora a secare la polare $C(Y)$ del generico punto Y di S_2 rispetto alla $C^{v+v'}$ con le curve $C^2, C^3, \ldots, C^{q+1}$, di equazioni (56), (57), (58), di cui ci siamo serviti per la dimostrazione della proprietà I) che precisa la posizione del primo gruppo di punti v-pli, $A_2^{(2)}, \ldots, A_2^{(q)}$, dopo il punto v'-plo A_2.

Sostituendo tali equazioni parametriche nell'equazione della $C(Y)$

$$(66) \qquad g(x_1, x_2, x_3) = a(v+v')\, y_1 x_1^{v+v'-1} + v y_2 x_2^{v-1} x_3^{v'} + v' y_2 x_2^{v} x_3^{v'-1}$$

si vede che le multiplicità d'intersezione della $C(Y)$ con $C^2, C^3, \ldots, C^{q+1}$ sono rispettivamente

$$(67) \qquad v+v'-1\,,\quad 2(v+v'-1)\,,\ \ldots,\ q(v+v'-1)\,,$$

e ciò dimostra, essendo A_2 semplice, doppio, .., q-plo per $C^2, C^3, \ldots, C^{q+1}$, che i punti $A_2^{(1)}, A_2^{(2)}, \ldots, A_2^{(q)}$ sono tutti v-pli per la $C(Y)$, assendo tutti semplici per dette curve.

Sechiamo ora la $C(Y)$ con la C^{q+2} di equazioni — (60) e si trova che la multiplicità d'intersezione è data dal minore dei due interi

$$(68) \qquad (q+1)(v+v'-1)\,, \qquad (q+2)(v'-1)$$

provenienti dalle due potenze $x_1^{v+v'-1}$ e $x_3^{v'-1}$. Nei casi precedenti il minore dei due esponenti di σ provenienti da tali due potenze era sempre il primo; in questo caso invece è il secondo $(q+2)(v'-1)$. Tenendo conto che la $C(Y)$ e la C^{q+2} hanno A_2 $(q+1)(v'-1)$ intersezioni, in ciascuno dei punti $A_2^{(1)}, \ldots, A_2^{(q)}$ v punti intersezione si ha che la multiplicità della $C(Y)$ in $A_2^{(q+1)}$ è minore di v, e precisamente è $v_1 - 1$, dato che si ha

$$(69) \qquad (q+2)(v'-1) - (q+1)(v'-1) - qv = v'-1-qv = v_1 - 1.$$

Si ha perciò:

IV) *La polare* $C(Y)$ *nel punto* A_2 *ha la multiplicità* $v'-1$. *Nei* q *punti* v-pli *per la* $C^{v+v'}$ $A_2^{(1)}, \ldots, A_2^{(q)}$, *posti nell'intorno del prim'ordine di* A_2, *la* $C(Y)$ *ha* q *punti pure* v pli. *Nel punto* $A_2^{(q+1)}$, *successivo in tale intorno di* A_2, v_1-plo *per la* $C^{v+v'}$, *la polare* $C(Y)$ *ha un punto* (v_1-1)-plo, *se è* $v_1 > 1$. *Nel caso* $v_1 = 1$ *la* $C(Y)$ *ha in comune con la* $C^{v+v'}$ *nell'intorno di* A_2 *solo i* q *punti* v-pli $A_2^{(1)}, \ldots, A_2^{(q)}$.

Si noti che *nel caso* $v_1 = 1$ l'abbassamento della classe determinato dai punti $A_2, A_2^{(1)}, \ldots, A_2^{(q)}$ è dato, essendo in questo caso $v'-1 = vq$, da:

$$(70) \qquad v'(v'-1) + qv^2 = v'(v'-1) +$$
$$+ qv \cdot v = v'(v'-1) + (v'-1)v = (v'+v)(v'-1) = D_2$$

che è l'abbassamento della classe determinato dal punto singolare A_2 già calcolato nel n. 3 formola (17).

E' bene notare che per $v_1 = 1$ la condizione (53) perchè la $C^{v+v'}$ presenti nell'intorno di A_3 il *caso minimo*, condizione che può mettersi nella forma:

$$(71) \qquad q \geqq v - v_1 - 1 \, ,$$

dà la condizione

$$(72) \qquad q \geqq v - 2.$$

Si ha perciò: (*caso* $v_1 = 1$):

V) *La* $C^{(q+1)v+1}$ *di equazione:*

$$(73) \qquad x_2^v \, x_3^{qv+1} + a x_1^{(q+1)v+1} = 0 \qquad (\text{con } q \geqq v - 2)$$

e la polare $C(Y)$ *del punto generico, hanno in comune:* A_2, $(qv+1)$-plo *per la curva e* qv-plo *per la polare; i punti* $A_2^{(1)}, \ldots, A_2^{(q)}$, v-pli *per la curva e per la polare, posti nella retta infinitesima costituita dall'intorno di* A_2; *i punti* $A_3, A_3^{(1)}, \ldots, A_3^{(q)}$ *della retta* $A_3 A_1$, v-pli *per la curva* $(v-1)$-pli *per la polare, ed il successivo* $A_3^{(q+1)}$ *che è semplice per la curva e* $(v-1)$-plo *per la polare.*

Si noti che *per* $v = 2$ o $v = 3$ *la condizione* (72) *è sempre soddisfatta,* essendo q un intero positivo. [Per $v = 2$, $q = 1$ si ha la C^5 considerata nel n. 7, Nota I. Possiamo aggiungere ora che la C^5, successivo al punto triplo A_2, ha un punto doppio $A_2^{(1)}$ che è pure doppio per la polare, come A_2 e si ha l'abbassamento $A_2 = 10$ della classe determinato da A_2, già calcolato in detta nota I].

Per la proposizione IV) diremo che: *la* $C^{v+v'}$ *nel caso* $v_1 = 1$ *presenta il caso minimo nel punto singolare* A_2. Segue che:

VI) *Le curve di equazioni* (73) *sono tutte e sole le* $C^{v+v'}$ *che presentano il caso minimo in entrambi i punti singolari* A_2 *e* A_3.

11. *Tangenti alla* $C^{v+v'}$ *infinitamente vicine alla tangente multipla* $A_2 A_1$.

La retta $a_3^{(1)} = a_3 = A_2 A_1$ e le successive rette $a_3^{(2)}, \ldots, a_3^{(q)}$ nel fascio di centro A_2, risultano tangenti v-ple per la $C^{v+v'}$, col punto di contatto in A_3 (che è v'-plo per la $C^{v+v'}$) perchè si ottengono congiungendo A_2 con i punti v-pli $A_2^{(1)}, \ldots, A_2^{(q)}$ posti nell'intorno del prim'or-

dine di A_2. La prima di tali rette è la retta a_3 origine del ramo inviluppo di equazione (23), di classe v e ordine v' considerato nel n. 5, ramo inviluppo che dà la figura duale del ramo luogo di origine A_3 di ordine v e classe v'. Le q tangenti v-ple suddette appartengono al detto ramo inviluppo, e costituiscono gli enti duali dei q punti v-pli A_3, $A_3^{(1)}$, . . , $A_3^{(q-1)}$.

La successiva retta $a_3^{(q+1)}$ ad $a_3^{(q)}$ nel fascio di centro A_2 risulta tangente alla $C^{v+v'}$ nei punti A_2, $A_2^{(q+1)}$, . . , $A_2^{(q+q_1-1)}$, ciascuna da contarsi v_1 volte, e nel punto $A_2^{(q)}$ da contarsi $v - v_1 q_1$ volte, dovendo risultare tangente v-pla per la $C^{v+v'}$, come figura duale dell'ultimo punto v-*plo* $A_3^{(q)}$ posto nella retta a_2, punto di contatto delle q_1 tangenti v_1-ple e della successiva tangente v_2-pla che si ottengono congiungendo $A_3^{(q)}$ con i q_1 punti v_1-pli ed il pnnto v_2-plo della $C^{v+v'}$ posti come vedremo nell'intorno del prim'ordine di $A_3^{(q)}$. Il primo di tali punti v_1-pli è il punto $A_3^{(q+1)}$ già considerato nel n. 7, ultimo punto che la $C^{v+v'}$ ha in $A_3 A_1$. Supposto $q_1 > 1$ si verifica che il successivo punto v_1-plo $A_3^{(q+2)}$ della $C^{v+v'}$ è il punto dell'intorno del prim'ordine di $A_3^{(q)}$ successivo al punto $A_3^{(q+1)}$ di tale intorno, secando il ramo di origine A_3 con una curva avente doppi i punti A_3, $A_3^{(q)}$, . . , $A_3^{(q)}$ e semplici i due punti $A_3^{(q+1)}$ e $A_3^{(q+2)}$, e quindi di equazioni parametriche:

$$(76) \qquad x_1 = \rho^2 , \qquad x_2 = \rho^{2(q+1)+1} , \qquad x_3 = 1.$$

Sostituendo le (76) nell'equazione della $C^{v+v'}$ si trova che la radice $\rho = 0$ nell'equazione che si ottiene ha la multiplicità $2(v + v')$. Tenendo conto che A_3, $A_3^{(1)}$, . . , $A_3^{(q+1)}$ assorbono $2(q+1) + v_1$ intersezione si trova che il rimanente punto $A_3^{(q+2)}$ è pure v_1 plo per la $C^{v+v'}$.

Secando la $C^{v+v'}$ successivamente con curve di equazioni del tipo

$$(77) \qquad x_1 = \rho^h , \qquad x_2 = \rho^{h(q+1)+1} , \qquad x_3 = 1$$

con $h = 3, 4, . . , q_1, q_1 + 1$, avente un punto h-plo in A_3, $A_3^{(1)}$, . . , $A_3^{(q)}$, e h punti semplici nei punti $A_3^{(q+1)}$, $A_3^{(q+2)}$, . . , $A_3^{(q+h)}$ posti nell'intorno del prim'ordine di $A_3^{(q)}$, si verifica l'esistenza dei successivi punti $A_3^{(q+3)}$, . . , $A_3^{(q+q_1)}$, v_1-pli per la $C^{v+v'}$, e del successivo punto v_2-plo $A_3^{(q+q_1+1)}$ sempre appartenenti all'intorno del prim'ordine di $A_3^{(q)}$. Si ha perciò, a complemento di quanto abbiamo dimostrato nel n. 7, che:

I) *Il gruppo dei* q_1 *punti* v_1-pli *del ramo di origine* A_3 *e il successivo primo punto* v_2-plo, *appartengono all'intorno del prim' ordine dell'ultimo punto* v-plo $A_3^{(q)}$, *posto nella tangente* $A_3 A_1$.

II) *La* $C^{v+v'}$ *ammette come tangenti* v-ple *col punto di contatto in* A_2 *le rette* $a_3^{(1)} = A_2 A_1$ *e le successive* $a_3^{(2)}$, . . , $a_3^{(q)}$ *congiungeni* A_2 *con i punti* v-pli $A_2^{(1)}$, . . , $A_2^{(q)}$ *posti nell'intorno del prim' ordine di* A_2, *e*

come tangente v-pla *la retta* $a_3^{(q+1)}$ *come sovrapposizione di* q_1 *tangenti* v_1-ple *col punto di contatto nei* q_1 *punti* A_2, $A_2^{(q+1)}$, . . , $A_2^{(q+q_1-1)}$ [*e di una tangente* v_2-pla *col punto di contatto nel punto* $A_2^{(q+q_1)}$, *supposto* $v_2 > 0$].

NOTA I. — *Tali* $q + 1$ *tangenti* v-ple *per il ramo di origine* A_2 *rispondono, dualmente, ai* $q + 1$ *punti* v-pli A_3, $A_3^{(1)}$, . . , $A_3^{(q)}$ *del ramo di origine* A_3. *Le* $q + 1$ *tangenti* v-ple *appartengono al fascio di centro* A_2; *dualmente i* $q + 1$ *punti* v-pli *appartengono alla punteggiata di sostegno* a_2.

Analogamente si noti che, tenendo conto della proposizione I) del n. 8:

La retta a_2, *sulla quale sono sovrapposte* q *tangenti* v-ple *ed una tangente* v_1-pla, *risponde, dualmente, al punto* A_2 *su cui sono sovrapposti* q *punti* v-pli *e un punto* v_1-plo (essendo A_2 v'-plo origine di q tangenti v-ple e di una tangente v_1-pla).

NOTA II. — Per la proposizione II) nel caso $v_2 = 0$ (e quindi $v_1 = 1$) la tangente nel punto $A_2^{(q+q_1)}$ (ultimo dei punti v_1-pli, e quindi semplici, nella retta $a_3^{(q+1)}$, non cade in tale retta $a_3^{(q+1)}$ (che resta sempre tangente v-pla).

La varietà di S_{11} determinata da una superficie algebrica come insieme dei suoi flessi.

Nota del socio ordinario **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 16 novembre 1957)

Sunto. — *Si studia la varietà* V_7 *dell'* S_{11} *costituita da* ∞^2 S_5 *determinati dagli* ∞^2 *flessi di una superficie algebrica assegnata nell'* S_3.

PREMESSA. — Data nell' S_3 complesso una superficie algebrica di ordine $n > 2$, prolungandola nell' *algebra dei numeri triduali,* si ha una superficie triduale che risulta rappresentata nell' S_{11} complesso da una varietà ad 8 dimensioni costituita da ∞^2 S_6 generatori *rispondenti alle* ∞^2 *calotte piane* della superfie [1].

Prolungando la stessa superficie data in S_3 nell' *algebra dei numeri tripotenziali* si ha una superficie tripotenziale che risulta rappresentata, nello stesso S_{11} complesso, da una seconda varietà a 8 dimensioni costituita da ∞^4 V^2_4 *rispondenti agli* ∞^4 E_2 *della superficie* [2].

Interessa studiare la varietà intersezione di tali due varietà ad 8 dimensioni dell' S_{11}, che trovansi in posizione particolare fra di loro, risultando, tale varietà intersezione, a 7 dimensioni, costituita da ∞^2 S_5 generatori *rispondenti agli* ∞^2 *flessi della superficie* data in S_3.

E' di tale argomento che ci occupiamo in questa nota.

1. Equazioni della V_7 di S_{11} intersezione delle due varietà rispondenti al prolungamento nei due campi triduale e tripotenziale di una data superficie algebrica dell' S_3 complesso.

Nell' S_3 complesso (x_j) $(j = 1, 2, 3, 4)$ sia data una superficie algebrica s^n di ordine n, di equazione:

$$(1) \qquad f(x_j) = 0 \ ,$$

irriducibile, di classe μ, e con la generica sezione piana di classe m.

---

[1]) N. Spampinato, *La varietà dell'* S_{11} *determinata da una superficie algebrica dell'* S_3 *complesso ;* «La Ricerca», Anno VI, n. 3. Istit. Edit., del Mezzogiorno, 1955.

[2]) N. Spampinato, *La* V_8 *di* S_{11} *determinata dalle coniche osculatrici ad una superficie algebrica di* S_3 *prolungata nel campo tripotenziale.* « Rendic. Acc. Sc. Fis. e Matem. Napoli », s. 4ª, Vol. XXIV, 1957.

Prolungando nel campo triduale e tripotenziale l'equazione (1), sostituendo alla x_j la variabile $x_j\, u + y_j\, v + z_j\, w$ triduale o tripotenziaie, con le tabelle di moltiplicazione delle tre unità u, v, w:

(2)

	u	v	w
u	u	v	w
v	v	0	0
w	w	0	0

nel caso triduale, e:

(3)

	u	v	w
u	u	v	w
v	v	w	0
w	w	0	0

nel caso tripotenziale, si hanno due equazioni algebriche, triduale e tripotenziale, equivalenti, nel campo complesso, la prima al sistema delle tre equazioni:

$$(4) \qquad f(x_j) = 0\,, \quad \sum \frac{\partial f}{\partial x_j}\, y_j = 0\,, \quad \sum \frac{\partial f}{\partial x_j}\, z_j = 0\,,$$

la seconda al sistema che si ottiene dal sistema (4) sostituendo alla terza equazione la seguente equazione:

$$(5) \qquad \sum \frac{\partial f}{\partial x_j}\, z_j + \frac{1}{2} \left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_j}\, y_j \right)^{(2)} = 0.$$

Ne segue che tali due sistemi, di tre equazioni ciascuno, rappresentano, nell'S_{11} complesso (x_j, y_j, z_j) $(j = 1, 2, 3, 4)$ due varietà ad otto dimensioni, già studiate, che costituiscono la rappresentazione complessa delle due superficie, triduale e tripotenziale, determinate dalla superficie s^n data nell'S_3.

L'intersezione di tali due varietà risulta rappresentata dal sistema delle quattro equazioni (4) e (5), e quindi, tenendo conto che la (5), per

la terza delle (4), si semplifica, si ha la V_7 rappresentata in S_{11} dal sistema:

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} f(x_j) = 0 \\ \sum \frac{\partial f}{\partial x_j} y_j = 0 \\ \sum \frac{\partial f}{\partial x_j} z_j = 0 \\ \left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_j} y_j\right)^{2)} = 0. \end{cases}$$

NOTA. — La V_7 di S_{11} rappresentata dal sistema (6) vedremo che *è costituita da* ∞^2 S_5 *generatori, rispondenti agli* ∞^2 *flessi della data superficie* s^n in $S_3(x_j)$. Alla coppia di flessi della s^n aventi l'origine in un dato punto semplice A di s^n rispondono due S_5 congiunti da *un* S_6 *generatore della* V_8^{η}, *rispondente alla superficie triduale, determinato dalla calotta piana di* s^n *di centro* A. Si ricordi che l'ordine η della V_8 assume il valore massimo n^3 se la s^n è priva di punti multipli. Nel caso che la s^n sia dotata di punti multipli (anche infiniti) la V_8 costituita dagli S_6 rispondenti alle coppie (A, π) (punto-piano tangente), con A semplice, e alle posizioni limiti al tendere di A ad un punto multiplo, è di ordine η dato da:

$$\text{(7)} \qquad \eta = n + 2m + \mu.$$

L'intero η è definito *ordine completo* della superficie s^n (di ordine n, di classe μ e con la generica sezione piana c^n di classe m).

2. Gli S_5 generatori della varietà di equazioni (6).

Nell'S_{11} (x_j, y_j, z_j) $(j = 1, 2, 3, 4)$ consideriamo i tre spazi $S_3(x_j)$, $S_3'(y_j)$, $S''(z_j)$ di equazioni, rispettivamente:

$$\text{(8)} \qquad y_j = z_j = 0$$

$$\text{(9)} \qquad x_j = z_j = 0$$

$$\text{(10)} \qquad x_j = y_j = 0.$$

Indichiamo inoltre con w' e w'' le due proiettività fra le due coppie di spazi (S_3, S_3') e (S_3, S_3'') di equazioni, rispettivamente:

$$\text{(11)} \qquad x_j = y_j$$

$$\text{(12)} \qquad x_j = z_j.$$

Se A è un punto di S_3 indicheremo con A′ e A″ gli omologhi di A nelle due proiettività v' e w''.

La prima equazione del sistema (6) rappresenta in $S_3(x_j)$ la data superficie s'', e nell' S_{11} l' ipercono V_{10}'' che si ottiene proiettando la s'' di S_3 dall' S_7' congiungente S_3' con S_3'', di equazioni:

$$(13) \qquad x_j = 0.$$

Sia A (a_j) un punto della s'' di $S_3(x_j)$. L' $S_8(A) = AS_7'$, generatore della V_{10}^n, è costituito dai punti di coordinate:

$$(13) \qquad (a_j\,\rho, y_j, z_j).$$

Come coordinate omogenee in tale $S_8(A)$ si possono assumere le 9 variabili:

$$(14) \qquad (\rho, y_j, z_j).$$

Con tali coordinate le (10) rappresentano il punto A, e l' equazione $\rho = 0$ rappresenta l' S_7' come iperpiano di $S_8(A)$.

Ciò premesso sostituendo nelle (6) alle x_j i prodotti $a_j\,\rho$, e tenendo conto che, essendo A in s^n, è $f(a_j) = 0$, si hanno le seguenti tre equazioni:

$$(15) \qquad \begin{cases} \rho^{n-1}\left(\sum \dfrac{\partial f}{\partial d_j}\, y_j\right) = 0 \\[2ex] \rho^{n\;1}\left(\sum \dfrac{\partial f}{\partial a_j}\, z_j\right) = 0 \\[2ex] \rho^{n\;2}\left(\sum \dfrac{\partial f}{\partial a_j}\, y_j\right)^{(2)} = 0\,, \end{cases}$$

che rappresentano l' intersezione di $S_8 = AS_7'$ con le altre tre ipersuperficie di S_{11} rappresentate dalle (6), esclusa la prima.

All' equazione $\rho = 0$ risponde in $S_8(A)$ l' S_7', che fa quindi parte della varietà rappresentata dal sistema (6) se è $n > 2$, contato $(n-1)^2\,(n-2)$ volte. L' ulteriore intersezione di tale varietà con l' S_8 è rappresentata dal sistema:

$$(16) \qquad \begin{cases} \sum \dfrac{\partial f}{\partial a_j} \cdot y_j = 0 \\[2ex] \sum \dfrac{\partial f}{\partial a_j}\, z_j = 0 \\[2ex] \left(\sum \dfrac{\partial f}{\partial a_j}\, y_j\right)^{(2} = 0. \end{cases}$$

Osservando che l'equazione

$$(17) \qquad \sum \frac{\partial f}{\partial a_j} x_j = 0$$

(supposto A semplice per la s^n) rappresenta in $S_3(x_j)$ il piano tangente π alla s^n in A e che il sistema che si ottiene associando alla (17) l'equaziene :

$$(18) \qquad \left(\sum \frac{\partial f}{\partial a_j} y_j\right)^{(2)} = 0$$

rappresenta in $S_3(x_j)$ la coppia delle due rette osculatrici la s^n in A, diciamo t_1 e t_2, segue che la seconda delle (16) rappresenta nell' $S_3''(z_j)$ il piano π'' omologo di π per la proiettività w'', e le altre due equazioni di tale sistema (16) rappresentano in $S'(y_j)$ le due rette t_1' e t_2' omologhe di t_1 e t_2 nella proiettività w'. Conseguentemente si ha che:

Il sistema (16) *rappresenta nell'* $S_8 = AS_7'$, *nelle coordinale* (ρ, y_j, z_j), *due* S_5, *e precisamente* $S_5^1 = At_1'\pi''$ *e l'* $S_5^2 = At_2'\pi''$, *determinati dal punto semplice* A *di* s^n, *dal piano tangente* π *ad* s^n *in* A *e dalle due rette (distinte o infinitamente vicine di* π) t_1 *e* t_2 *che osculano* s^n *in* A, *per mezzo delle due proiettività* w' *e* w''.

Gli S_5 suddetti, S_5^1 ed S_5^2 si possono considerare determinati dalle due *terne punto-retta-piano appartenentisi* (A, t_1, π) e (A, t_2, π) dell'$S_3(x_j)$, per mezzo delle proiettività w' ed w'', e tali terne sono, a loro volta, determinate dal punto semplice A della superficie s^n di $S_3(x_j)$. Nel seguito li indicheremo con $S_5^1(A)$ ed $S_5^2(A)$ e costituiscono *due* S_5 *generatori* della V_7 di S_{11} di equazioni (6) determinata dalla data superficie s^n, appartenenti all'$S_8 = AS_7'$. Si noti esplicitamente che *tali due* S_5 *generatori sono congiunti dall'* $S_6(A) = A\pi'\pi''$ *e si intersecano nell'* $S_4 = AA'\pi''$. L'$S_6(A)$ in $S_8 = AS_7'$ è rappresentato dalle prime due equazioni (9) ed è l'S_6 generatore della V_8^n di equazioni (4) determinato dalla calotta piana di s^n di centro A, cioè dalla coppia punto-piano appartenentisi (A, π) (Nota del n. 1).

Variando A fra i punti semplici di s^n avremo ∞^2 S_5 generatori appartenenti alla varietà rappresentata dalle equazioni (6), *considerando anche le posizioni limiti di tali* S_5 *generatori al tendere del punto semplice* A *ad un eventuale punto multiplo* di s^n, costituenti una varietà che indicheremo con V_7^σ.

NOTA. — Si noti esplicitamente che se A è un punto multiplo di s^n con multiplicità >2 tutto il sistema (16) risulta identicamente soddisfatto e *tutto* l'$S_8(A)$ *fa parte della varietà rappresentata da detto sistema*. Se A è doppio per la s^n delle equazioni (16) risultano identicamente soddi-

sfatte solo le prime due, e quindi, in tal caso, si ha in S_8 (A) l'ipercono che si ottiene proiettando dall' $S_4 = AS_3''$ il cono quadrico di S_3' (y_j) rappresentato dalla terza equazione del sistema, cioè il cono omologo per la proiettività w' del cono tangente alla s^n nel suo punto doppio A, di equazione :

$$(19) \qquad \left(\sum \frac{\partial f}{\partial a_i} x_j\right)^{(2)} = 0 \ .$$

Tale ipercono, di dimensione 7, farà parte della varietà rappresentata dal sistema (6), e di cui, come abbiamo già osservato, se è $n > 2$, fa sempre parte l' S_7' contato $(n-1)^2 (n-2)$ volte.

Si noti esplicitamente che nel caso $n = 2$, con la quadrica s^2 non cono, le due rette t_1 e t_2 sono le due rette della quadrica intersecantisi nel punto A, e quindi i due S_5 generatori della V_7^σ uscenti da A si ottengono proiettando dall' $S_3 = A\pi''$ le due rette t_1' e t_2'' della quadrica di S_3' omologa di s^2 nella proiettività w'.

3. La V_6' intersezione della V_7^σ con l' S_7'.

I due S_5 generatori della V_7^σ determinati dal punto semplice A di s^n, e precisamente dalle due terne (A, t_1, π) e (A, t_2, π), sono intersecati dall' S_7' in due S_4, e precisamente nei due $S_4^1 = t_1' \pi''$ e $S_4^2 = t_2' \pi''$ che congiunti con A determinano tali due S_5 generatori [dati da $S_5^1 = At_1' \pi''$ e $S_5^2 = At_2' \pi''$]. Indichiamo con V_6' la varietà di S_7' costituita dagli ∞^2 S_4 che gli ∞^2 S_5 generatori della V_7^σ secano in S_7'. Interessa calcolare l'ordine di questa V_6' al fine di poter calcolare dopo l'ordine della V_7^σ in funzione di caratteri della s^n che la determina in S_{11}.

Si noti in primo luogo che le ∞^2 coppie di rette (t_1, t_2) osculatrici la s^n di S_3 (x_j) costituiscono una congruenza (supposto $n > 2$). Se indichiamo con h l'ordine di questa congruenza si ha che :

I) *L'* S_3' *appartiene alla* V_6' *con la multiplicità* h.

Infatti per un punto P di S_3' passano h rette t_i' omologhe, per la proiettività w', delle h rette t_i osculatrici di s^n passanti per il punto P di S_3, e quindi per P' passano h degli S_4 generatori della V_6', dati da $S_4^i = t_i' \pi_i''$ avendo indicato con π_i il piano osculatore la s^n che contiene la retta osculatrice t_i, e con π_i'' il suo omologo per la w'', in S_3''.

Per determinare l'ordine della V_6' di S_7' sechiamola con un S_4 di S_7' della stella avente per vertice l' S_3' h-plo per la V_6' e andiamo a determinare la residua V_3' intersezione, il cui ordine sommato con h darà l'ordine della V_6'.

Indichiamo con P$''$ il punto in cui l'S_3'' è secato dall'S_4' considerato nella stella di vertice S_3'. Per P$''$ passano ∞^1 piani π'' tangenti alla superficie s'' omologa di s^n per la proiettività w''. In ciascuno di tali ∞^1 piani π'' vi sono due rette t_1'' e t_2'' osculatrici la s'' e quindi P$''$ appartiene a ∞^1 coppie $S_4^1 = t_1' \pi''$, $S_4^2 = t_2' \pi''$, generatori della V_6' e secati dall'$S_4 = P'' S_3'$ considerato in ∞^1 coppie di piani, $S_2^1 = t_1' P''$ e $S_2^2 = t_3' P''$, costituenti in S_4' l'intersezione V_3' con la V_6'. L'ordine di questa V_3' sarà dato, perciò, dall'ordine della rigata di S_3' costituita dalle ∞^1 coppie di rette t_1', t_2' osculatrici la superficie s' appartenenti agli ∞^1 piani π' tangenti la s' passanti per il punto P$'$, e quindi *osculanti la s' nei punti della curva sezione della s' con la superficie polare di* P$'$. L'ordine di tale rigata dipende, pertanto, dalla data superficie s^n e precisamente dalla congruenza delle rette osculatrici, considerando solo le ∞^1 che osculano la superficie s^n nei punti della curva [di contatto del cono tangente la s^n con il vertice in un generico punto P di S_3], *intersezione della s^n con la prima polare di* P *rispetto alla s^n.*

Se indichiamo con h_2 l'ordine della rigata costituita da tali ∞^1 rette osculatrici la s^n, sarà h_2 l'ordine della V_3'. Ne segue che:

II) *L'ordine della V_6' intersezione della V_7^σ con l'S_7', costituita dagli ∞^1 S_4 intersezione di S_7' con gli ∞^1 S_5 generatori delle V_7^σ, è dato da $h + h_2$.*

4. La V_6 ulteriore intersezione della V_7^σ con un iperpiano della stella di centro S_7' oltre la V_6'.

Intersecando la V_7^σ con un S_{10} di S_{11} della stella di centro S_7' si otterrà una sezione iperpiana spezzata nella V_6', di ordine $h + h_3$, che la V_7^σ ha un S_7' [considerando nel n. 3], e in una V_6 residua, che sarà costituita da ∞^1 fra gli ∞^2 S_5 generatori della V_7^σ, e precisamente dalle ∞^1 coppie $S_5^1 = At_1' \pi''$, $S_5^2 = At_2' \pi''$ rispondenti agli ∞^1 punti semplici A della curva c^n della s^n sezione con l'S_{10}, e alle loro posizioni limiti al tendere di A, variando in c^n, ad un eventuale punto multiplo di c^n. Supposto S_{10} generico nella stella di centro S_7', sarà c^n una sezioue piana generica della s^n di S_3, ottenuta col piano che S_{10} seca in S_3. Ne segue che la c^n sarà dotata di punti multipli solo se la s^n è dotata di curva multipla.

Si ricordi che le due rette t_1 e t_2 sono le due rette che osculano la s^n nel punto semplice A, e quindi congiunte dal piano π tangente alla s'' in A.

I due S_5 generatori suddetti secano in S_7' i due S_4 dati da $S_4^1 = t_1' \pi''$ e $S_4^2 = t_2' \pi''$ intersecantisi nell'$S_3 = A' \pi''$, essendo A$'$ comune alle rette t_1' e t_2'' } che osculano la s' nel punto A$'$, omologhe delle due rette t_1 e t_2

[che osculano la s^n nel punto A], nella proiettività $w' \}$. Il piano π'' sarà il piano tangente alla s'' nel punto A''. Variando A in c^n, e quindi A' in c' ed A'' in c'', [curve di π' e π'' omologhe di c^n per la proiettività w' e w''], tale coppia di due S_4 descriverà in S_7' una varietà V_5' che sarà l'intersezione con S_7' della V_6 descritta dalla coppia di S_5 sopra considerata. Per determinare l'ordine della V_6 interessa calcolare l'ordine di detta V_5' di S_7'.

Si osservi, in primo luogo, che la V_5', avendo nell' S_3'' gli ∞^1 piani π'' tangenti all' s'' nei punti della sezione piana c'', contiene detto S_3'', con la multiplicità data dal numero $q \leqq n(n-1)$ dei piani tangenti alla s'' in punti semplici di c'' passanti per un punto P'' fissato genericamente in S_3''. [Tale intero q raggiunge il valore massimo $n(n-1)$ se la s^n è priva di curva multipla, nel qual caso la c^n, sezione piana generica di s^n, è priva di punti multipli, e i punti di contatto in punti di c^n dei piani tangenti ad s^n passanti per il generico punto P di S_3, sono gli $n(n-1)$ punti intersezione della c^n con la superficie s^{n-1} polare di P rispetto alla s^n. Supposto, in particolare, che P sia un generico punto del piano della c^n, secato in S_3 dall' S_{10}, il numero q dei piani tangenti alla s^n passanti per P e con il punto di contatto nella c^n eguaglia il numero m delle tangenti a c^n passanti per P, tangenti che vengono secati nel piano della c^n precisamente da tali piani tangenti alla s^n. Si ha perciò :

La V_5' che la V_6 ha in S_7' contiene l' S_3'' con la multiplicità m, classe della generica sezione piana della superficie s^n.

Intersechiamo ora la V_5' di S_7' con un S_5' di S_7' contenente l' S_3'' m-plo della V_5'.

Diciamo r' la retta di S_3' intersezione con S_5'. Le ∞^1 rette t' che gli ∞^1 $S_4 = \pi'' t'$ generatori della V_5' hanno in S_3' costituiscono la rigata delle rette che osculano la s' nei punti della sua sezione piana c', omologa della c^n per la w''. Diciamo h_1 l'ordine di tale rigata, si avranno h_1 generatrici di tale congruenza appoggiate alla retta r' ed in corrispondenza h_1 $S_4^i = t_i' \pi_i''$ generatori della V_5' intersecanti la r' in tali h_1 punti di appoggio, diciamo R_i'. Tali h_1 S_4^i generatori della V_5' sono secati dall' S_5', contenente l' S_3'', negli h_1 $S_3^i = R_i' \pi_i''$, che costituiranno la residua intersezione della V_5' con l' S_5' oltre l' S_3'' m-plo per la V_5'. Si ha perciò :

III) *L'ordine della V_5' che la V_6 ha in S_7' è dato da $m + h_1$.*

Consideriamo ora un S_9 di S_{11} contenente l' S_7' e contenuto nell' S_{10} ambiente della V_6 e diciamo $A_1, \ldots, A_n$ gli n punti in cui la s^n è secata dalla retta che l' S_9 seca in S_3. Per ciascuno degli n punti A_j passano 2 S_5 generatori della V_6. Si hanno così $2n$ S_5 generatori della V_6 contenuti in S_9 perchè ciascuno di essi ha un S_4 in S_7'. Tali $2n$ S_5 aggiunti alla V_5',

di ordine $m + h_1$, costituiranno l'intersezione della V_6 con l'S_9. Si ha perciò:

IV) *L'ordine della* V_6, *ulteriore intersezione, oltre la* V_6', *con l'iperpiano* S_{10} *della stella di vertice* S_7', *è dato da* $2n + m + h_1$.

5. Ordine della V_7^σ.

Dalle proposizioni II) (n. 3) e IV) (n. 4) segue che:

L'ordine della varietà V_7^σ *di* S_{11} *costituita dagli* ∞^2 S_5 *generatori rispondenti nella varietà di equazioni* (6) *agli* ∞^2 *punti semplici della superficie* s^n $(n > 2)$ *di* S_3 (x_i) *di equazione* (1) *e alle loro posizioni limite al tendere di un punto semplice ad un eventuale punto multiplo di* s^n *è dato da:*

$$\sigma = 2n + m + h + h_1 + h_2$$

essendo m *la classe di una generica sezione piana di* s^n, h *l'ordine della congruenza costituita dalla* ∞^2 *rette osculatrici la* s^n, h_1 *l'ordine della rigata costituita dalle* ∞^1 *rette cke osculano la* s^n *nei punti di una sua generica sezione piana e con* h_2 *l'ordine della rigata delle rette che osculano la* s^n *nei punti della curva intersezione della* s^n *con la superficie prima polare, rispetto ad* s^n, *di un generico punto dell'* S_3.

NOTA. — Si noti che se indichiamo con i_π il numero dei flessi della generica sezione piana c^n della s^n si ha che l'ordine della rigata costituita dalle rette osculatrici la s^n nei pnnti di detta sezione piana π è dato da:

$$h_1 = i_\pi + 2n \,, \tag{20}$$

e l'ordine della rigata costituita dalle rette osculatrici la s^n nei punti della curva intersezione della s^n con la superficie s^{n-1} prima polare rispetto ad s^n di un generico punto di S_3, è dato da:

$$h_2 = 2n\,(n-1) \quad \text{o} \quad h_2 = 2q \tag{21}$$

se la s^n è priva di curve multiple o è dotata di curve multiple, nel qual caso *si indica con* q *l'ordine della sezione della* s^n *con la prima polare escludendo le curve multiple.*

Segue che *l'ordine* σ *della* V_7 *si può calcolare con la formola:*

$$\sigma = 4n + m + i_\pi + 2q + h. \tag{22}$$

Se la s^n è priva di punti multipli è $h = n\,(n-1)\,(n-2)$, $q = n\,(n-1)$, $m = n\,(n-1)$, $i_\pi = 3n\,(n-2)$ e si ha, in tal caso $m + 2q = 3n\,(n-1)$, $i_\pi + h = (n-2)\,(n^2 + 2n)$, $4n + m + 2q = 3n^2 + n$ e $i_\pi + h = n^3 + 2n^2 -$ $- 2n^2 - 4n = n^3 - 4n$ e quindi:

L'ordine σ *della* V_7 *per una superficie* s^n *priva di punti multipli è:*

$$\sigma = n^3 + 3n^2 - 3n. \tag{23}$$

Note geologiche ercolanesi *)

Materiali piroclastici anteriori all'eruzione del 79 d. C. rinvenuti sotto l'area della Palestra in Ercolano.

Nota del dott. **Virgilio Catalano**
presentata dal socio ordinario **G. D' Erasmo**

(Adunanza del dì 16 novembre 1957)

Sunto. — Sotto l'antico piano di calpestio della Palestra di Ercolano sono apparsi strati di cenere grigia, lapilli e voluminosi proietti (calcare marnoso del Somma), *humus*, cenere biancastra e tufo giallo. L'autore ritiene di scorgere in essi la documentazione di due distinte eruzioni anteriori a quella del 79 d. C., per la datazione delle quali pone in evidenza il contributo notevole che potrebbe aversi dall'esito favorevole di sistematiche ricognizioni archeologiche effettuate nello strato intermedio di *humus*.

Nello studio delle antiche civiltà non si può prescindere dalla conoscenza dell'ambiente geografico in cui esse si svilupparono: tale conoscenza è particolarmente doverosa per l'archeologo che assume ad oggetto di studio la zona del litorale campano, dove la vita dei popoli che abitarono quella fertilissima e popolosa plaga è intimamente collegata alla storia dei numerosi vulcani flegrei, nonchè del Vesuvio che maestoso domina l'intero golfo partenopeo. Parimenti il geografo e il geologo non possono non tenere presenti i monumenti, che testimoniano la vita di passate generazioni nelle località da essi studiate, perchè dalla conoscenza di questi monumenti è possibile ricavare talvolta qualche utilità per le loro ricerche, e non soltanto ai fini di una migliore datazione dei fenomeni presi ad oggetto di studio delle rispettive discipline.

Nello scavo delle sottofondazioni per la costruzione di piloni per un ponte a Ercolano, realizzato con la finalità di riportare alla luce la vasca e gli ambienti settentrionali della Palestra, si è occasionalmente operato

---

*) Queste note sono state compilate circa quattro anni fa e vengono pubblicate per un postumo atto di omaggio alla memoria del compianto Maestro Mons. Giovan Battista Alfano. Ma dal prof. Antonio Parascandola, che fu da me avvertito dell'importante rinvenimento e quindi invitato dal Soprintendente alle Antichità, prof. Amedeo Maiuri, ad uno studio particolareggiato, si attende ancora la pubblicazione ufficiale.

All'autorevole amico accennai, fin dal 9 novembre 1953, le mie idee in proposito, che ora pubblico per cortese interessamento del Direttore dell'Istituto di Geologia, prof. Geremia D'Erasmo, cui va tutta la mia devota riconoscenza.

un saggio stratigrafico, che, pur limitato a pochi metri quadrati e per una profondità di circa sei metri dall'antico piano di calpestio, offre un profilo geologico che viene a documentarci su due eruzioni anteriori a quella del 79 d. C. Uno strato di *humus* distingue i materiali relativi alle due eruzioni: in esso nessuna testimonianza di abitato preistorico si è rinvenuto, ma, considerata la poca ampiezza del saggio operato, non è da escludersi la possibilità in un prossimo futuro di poter scoprire con nuovi saggi nel medesimo strato vegetale [1]) eventuali ritrovamenti, la cui datazione di non poca utilità si offrirebbe per la datazione delle eruzioni documentate nei materiali vulcanici sotto l'area della Palestra ercolanese.

Le note che seguono, anche se accompagnate da congrue riflessioni personali, non hanno altra pretesa che porre in evidenza la necessità scientifica dello scavo stratigrafico, purtroppo mai tentato nelle diverse campagne di scavo condotte dal 1738 a oggi in Ercolano, utile per la migliore conoscenza della storia più antica della città e del Somma-Vesuvio.

E' doveroso e doloroso riconoscere anzitutto che per Ercolano, nonostante una annosa polemica in cui molti e autorevoli furono gli interventi da parte di studiosi di diverse discipline sulle cause e sul meccanismo di seppellimento della città [2]) e qualche sporadica indagine in una recente miscellanea di studi pompeiani [3]), manca tuttora uno studio geologico sistematico condotto con moderni criteri e con l'indispensabile e prezioso sussidio dei risultati analitici degli esami petrografici e mineralogici sull'abbondante materiale vulcanico del 79 d. C. Col rinvenimento di materiali vulcanici al di sotto dello strato vegetale dell'antico piano di calpestio della Palestra di Ercolano si apre un capitolo nuovo di utili

---

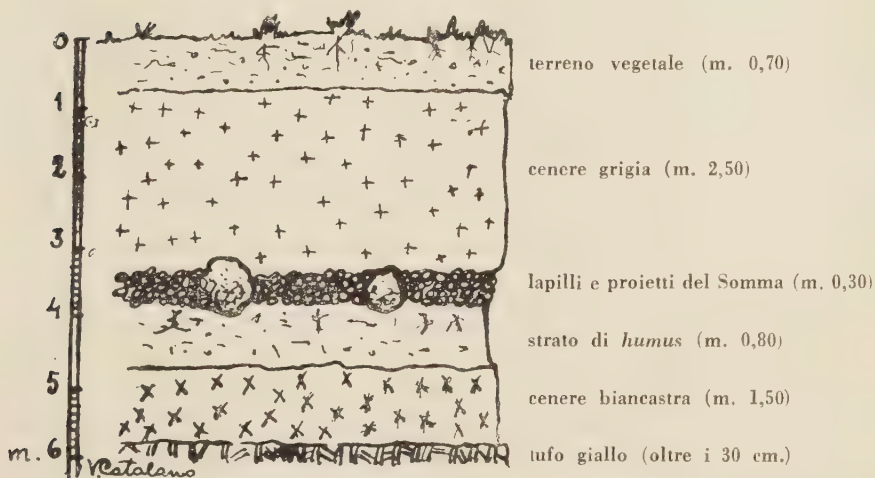
[1]) Saggi stratigrafici si potrebbero operare nelle aree dei giardini delle abitazioni ercolanesi, nella Palestra delle Terme o nella zona suburbana ancora in fase di scavo.

[2]) Per la bibliografia cfr. F. Ippolito, *Sul meccanismo di seppellimento di Pompei e di Ercolano*, in « Pompeiana », Napoli, 1950, pp. 387-395; A. Rittmann, *L'eruzione vesuviana del 79. Studio magmalogico e vulcanologico*, in « Pompeiana », pgg. 456-474. Utili informazioni erudite per il periodo anteriore al 79 d. C. si hanno nell'articolo del Parascandola, *L'attività e la forma del Vesuvio nell'antichità e l'origine del suo nome*, apparso nella rivista « Gli Abissi », n. 1, pgg. 57-104 + 4 tvv. f.t., Napoli, 1938.

[3]) Cfr. F. Ippolito, *cit.*, pg. 390 sgg.; A. Rittmann, *cit.*, pg. 462 e sgg. Non inutile per lo studio dei materiali che seppellirono Ercolano sarà notare che durante i lavori di sterramento, dal viale di accesso agli Scavi fino al piano di calpestio della Palestra, il terreno non sempre offrì al piccone una medesima compattezza: mentre nel lato sud della vasca cruciforme della Palestra si incontrava una tenacissima resistenza, nella zona dove attualmente è stato costruito il ponte il banco tufaceo offriva in qualche punto così debole resistenza da far ritenere opportuno allargare la trincea aperta e rinforzare l'elegante ed agile ponte in cemento armato, opera del compianto architetto Mario Paolini, con appositi solidi rinforzi di piloni. Inoltre, sotto l'azione degli agenti atmosferici, quel materiale di consistenza tufacea si disgrega, anche se lentamente, con notevole facilità.

ricerche che non andrebbero trascurate nell'interesse dell'archeologia e della geologia [4]).

Presente fin dall'inizio all'eccezionale scoperta, mi accingo a descrivere la stratigrafia dei materiali nell'ordine in cui essi sono apparsi durante i lavori di sottofondazione. Mi sia consentito di esprimere, in base al solo esame macroscopico dei materiali, alcune deduzioni ed ipotesi, che, nell'attesa di più ponderati studi da parte di chi ha autorevole competenza e maggiore possibilità scientifiche d'indagini, come il prof. PARASCANDOLA, nessuna pretesa di definitività possono avere, se una definitività è ammissibile nel campo delle indagini scientifiche.

Stratigrafia dei materiali piroclastici rinvenuti sotto il piano di calpestio nella Palestra di Ercolano.

La stratigrafia risultante dallo scavo è costante in tutti i pozzi per gli otto piloni di sostegno al ponte [5]), ottenuti in un'area rettangolare di m. 21 per m. 10, per cui nell'annessa figura è riprodotto in forma schematica un unico profilo geologico.

---

[4]) Materiali di eruzioni precedenti quella del 79 d. C. si sono avuti nel cortile della Casa dei Vasi di Vetro (Pompei) e presso Porta Vesuvio (Pompei): si tratta di due correnti laviche divise da materiali piroclastici incoerenti. Cfr. P. NICOTERA, *Sulle rocce laviche nell'antica Pompei*, in « Pompeiana », pg. 412. Manufatti dell'ottavo secolo a. C. furono sepolti sotto abbondante mantello cineritico presso S. Marzano. Cfr. E. PAIS, *Per la storia antichissima della Valle del Sarno*, in « Rend. Acc. Lincei », cl. sc. mor., s. V, v. XVII, pgg. 469-482, Roma, 1908. Segnalazione di antiche lave fornisce A. PARASCANDOLA, in *Contributo alla geologia del Somma*, nel « Boll. Soc. Naturalisti di Napoli », 1957, pgg. 3-5 dell'estratto.

[5]) Ogni pozzo misura m. 4 per m. 4,30 di superficie e circa sei metri di profondità.

Descrizione dei materiali rinvenuti.

L' esame macroscopico dei materiali vulcanici rinvenuti [6]) sotto il piano di calpestio della Palestra di Ercolano (quota altimetrica 18 s. l. m.) ha mostrato, dall' alto in basso, secondo l' ordine di rinvenimento, dopo lo strato di terreno vegetale di circa 70 cm., gli strati seguenti:

1) *strato di cenere* di colore grigio, simile alla pozzolana, per uno spessore di m. 2,50.

2) *strato di lapilli*, per una potenza di circa 30 cm., attraversato da sacche, nelle quali si rinvengono incastrati grossi proietti vulcanici di variabile diametro, ma non superiore ai 60 - 70 cm. e con un peso massimo di 80 kg. Il tipo predominante di questi ha aspetto di roccia calcareo marnosa con cristalli di meionite, monocolore (grigio chiaro), e ricorda quella eocenica; nei lapilli mi sembra poter riconoscere fenocristalli di leucite e augite.

3) *strato di humus*, terra vergine di colore nerastro, per una profondità di circa 80 cm.

4) *strato di cenere* di colore biancastro, per uno spessore di circa m. 1,50, simile alla pozzolana.

5) *strato di tufo giallo*, che si estende per oltre 30 cm. (oltre non si è scavato), simile al tufo del secondo periodo flegreo.

Considerazioni sui materiali vulcanici.

Dall' esame macroscopico dei materiali vulcanici rinvenuti a Ercolano, in una area limitata a pochi metri quadrati, è possibile ricavare le seguenti considerazioni:

a) i diversi strati di materiali piroclastici che figurano nel profilo geologico documentano più fasi eruttive riconducibili a due distinte eruzioni per la presenza intermedia dello spesso mantello di terreno vegetale (*humus*);

b) i voluminosi blocchi di calcare metamorfico con cristalli di meionite, semiaffondati nello strato di *humus* e ricoperti di lapilli, rivelano chiaramente per la loro natura petrografica la provenienza dalle basse pareti del condotto del Somma, dal quale dovettero essere strappati per effetto di violentissima pressione gassosa durante un' apocalittica eruzione, la medesima documentata nelle fasi successive dallo strato di lapilli e dal pesante mantello di cenere grigia;

c) la presenza della cenere biancastra al di sotto dello strato di *humus* potrebbe rappresentare la fase conclusiva di una precedente eruzione: infatti, anche nella fase terminale del meccanismo eruttivo del 79 d. C., si riscontra, nei materiali di cui è formata l' ultima colata fangosa che coprì Ercolano, quella cenere biancastra che Plinio il Giovane

---

[6]) L'esame microscopico dei materiali descritti verrà pubblicato dal prof. Antonio Parascandola.

ricorda essere caduta con notevole abbondanza a Miseno [7]). Se invece il tufo giallo dovesse riferirsi, in sèguito ad un attento esame mineralogico comparativo, all'attività di un più lontano bacino vulcanico come quello dei Flegrei, la presenza di un unico strato di cenere costituirebbe, limitatamente alla ristretta area dell'occasionale saggio stratigrafico, l'unica documentazione di tutto il materiale eruttivo di quella eruzione, che, secondo l'ipotesi del RITTMANN, riferita al XII secolo a. C., dovette essere meno violenta di quella dell'ottavo secolo e dovuta ad « attività perdurante, cioè a condotto aperto » [8]).

Conclusione.

Il profilo geologico scoperto occasionalmente sotto l'area della Palestra di Ercolano viene a documentare l'attività del Somma-Vesuvio anteriormente al 79 d. C. e consente, per la presenza di uno strato intermedio di *humus*, la distinzione di due atti eruttivi. Inoltre, nella più recente delle due eruzioni, rappresentata dallo strato dei lapilli, dai voluminosi proietti del Somma, nonchè dalla coltre di cenere grigia, forse è da riconoscersi quella terribile conflagrazione — cui accenna anche il PARASCANDOLA [9]) — che per l'obliquità dell'asse eruttivo distrusse la parte sud-occidentale dell'alto cono vulcanico, in modo analogo a quanto si verificò per il Monte Nuovo [10]), e che coprì con circa mezzo metro di lapilli l'abitato italico nella Valle del Sarno [11]).

Se indubbio è il contributo alla geologia e alla storia del Somma-Vesuvio che si ha col presente rinvenimento di materiali vulcanici, una eventuale ricognizione archeologica nello strato di *humus* sottostante al banco dei lapilli e proietti potrebbe offrire notevoli risultati: l'eventuale presenza di reperti archeologici costituirebbe, infatti, come nella valle del Sarno, testimonianza utile per la più antica storia di Ercolano ed indispensabile ai fini di una più sicura datazione dei materiali vulcanici relativi alle due riferite eruzioni.

---

[7]) Cfr. PLINIO junior, *Ep.*, l. VI, 20: *...occursabant trepidantibus adhuc oculis mutata omnia, altoque cinere tamquam nive obducta.* L'eccezionale colorazione è spiegata dal RITTMANN come « una caratteristica della cenere proveniente dal magma profondo del bacino » (pg. 469).

[8]) Cfr. A. RITTMANN, *cit.*, pg. 471.

[9]) Cfr. A. PARASCANDOLA, *cit.* pg. 80 e sg. Il PARASCANDOLA è d'accordo col PAIS nello stabilire il periodo in cui si verificò l'eruzione che decapitò il Somma: fine VIII - inizio VII secolo a. C.

[10]) Nel quarto giorno dell'eruzione di Monte Nuovo, il 3 ottobre del 1538, un'esplosione obliqua produsse un cambiamento nella morfologia dell'orlo craterico sul fianco meridionale. Uno studio particolareggiato sull'argomento ha fatto il PARASCANDOLA nel « Boll. Soc. Naturalisti di Napoli »: *Il Monte Nuovo ed il Lago Lucrino* (v. LV, 1946, pgg. 151-312 + XVI tvv.).

[11]) Cfr. E. PAIS, *Op. cit.*, pg. 472.

Sui numeri bicomplessi di Corrado Segre

Nota del socio ordinario **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 7 dicembre 1957)

Sunto. — Si mette in rilievo come l'algebra dei *numeri bicomplessi* ha avuto origine attraverso ricerche geometriche di Corrado Segre, sugli enti *iperalgebrici*, come algebra a quattro unità definita nel corpo reale.

1. Origine geometrica dell'algebra dei numeri bicomplessi di Corrado Segre.

Nella classica nota « *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici* », pubblicata nel 1891 nel vol. XL dei « *Mathematische Annalen* », Corrado Segre mette in rilievo che: « come per lo studio degli enti algebrici fu necessaria l'introduzione degli elementi complessi, così per quello più vasto degli enti iperalgebrici si rivela necessaria, od almeno utilissima, una nuova estensione di questi elementi in quelli che dico *elementi bicomplessi* » (pag. 414).

Dopo l'introduzione dei punti bicomplessi (nn. 23, 24, 25, 26 e 27), nel n. 27 (pag. 455), il Segre si domanda « L'introduzione dei *punti* immaginari in Geometria corrisponde all'introduzione dei *numeri* immaginari (coordinate) in Analisi.

Qnale sarà l'ulteriore generalizzazione del concetto di *numero*, che corrisponderà all'estensione che abbiamo fatto nel campo geometrico introducendo i *punti bicomplessi?* ». A tale domanda il Segre risponde nel seguente modo:

« La risposta si ha subito, ricorrendo alle rappresentazioni con cui siamo giunti a questi punti. Basterà limitarci a considerare i punti di una retta. I punti complessi di questa sono rappresentati dai punti reali del piano σ, e precisamente il punto che sulla retta ha per coordinata il numero complesso $x + iy$, ove x, y sono reali ed $i^2 = -1$, ha per immagine nel piano σ il punto di coordinata x, y. Ora per ottenere sulla retta anche i punti (x, y) complessi, e ne potremo indicare le coordinate con

$$x = x_1 + hx_2 , \qquad y = y_1 + hy_2 ,$$

ove x_1, x_2, x_3, x_4 son reali, e $h^2 = -1$; e per conservare la stessa legge di corrispondenza fra i punti della retta e quelli del piano si dovrà assu-

mere nel punto bicomplesso corrispondente della retta ancora la coordinata $x + iy$, ossia:

$$x_1 + hx_2 + i(y_1 + hy_2) = x_1 + hx_2 + iy_1 + hiy_2 .$$

Per tal modo siamo condotti ad assumere sulla retta per coordinate dei punti bicomplessi, dei numeri, che *diremo pure bicomplessi*, del tipo $x_1 + hx_2 + iy_1 + hiy_2$ *), ove x_1, x_2, y_1, y_2 son reali ed h, i sono due unità *essenzialmente distinte* tali che $h^2 = i^2 = -1$ (mentre $h \neq \pm i$). Inoltre, sempre per ragione di uniformità col caso in cui x ed y sono reali, mantenendo le definizioni di addizione, moltiplicazione, ecc. che si sogliono usare pei numeri complessi a più unità, conviene fissare che il prodotto delle nostre unità sia commutativo ed associativo, sicchè $hi = ih$, $(hi)\,i = h\,(ii) = -h$, ecc. Si otterrà così nell'insieme di questi numeri bicomplessi uno, particolare di quei campi o corpi di numeri complessi a più unità, per i quali *l'addizione, la sottrazione e la moltiplicazione soddisfano alle stesse leggi dell'aritmetica ordinaria* ».

Da quanto abbiamo riportato risulta che:

I) *I numeri bicomplessi sono stati introdotti da* CORRADO SEGRE *come elementi*

$$1 \cdot x_1 + hx_2 + iy_1 + ky_2$$

di un'algebra del 4° *ordine, definita nel corpo* reale, (*dove variano i quattro numeri reali* x_1, x_2, y_1, y_2) *con le quattro unità* 1, h, i, k, *e la tabella di moltiplicazione:*

	1	h	i	k
1	1	h	i	k
h	h	-1	k	$-i$
i	i	k	-1	$-h$
k	k	$-i$	$-h$	1

NOTA. — A pag. 457 il SEGRE, dopo aver accennato alle ricerche sui corpi di numeri complessi studiati *in generale* dal WEIERSTRASS, osserva che « riguardo al nostro caso *particolare*, cioè ai nostri numeri bicom-

*) Se si vuole, son numeri del tipo $x_1 + hx_2 + iy_1 + kx_2$ ove le *tre* unità h, i, k soddisfano alle relazioni

$$h^2 = i^2 = -1 , \quad k^2 = 1 \quad hi = k , \quad ik = -h , \quad kh = -i .$$

plessi, possiamo rilevare che essi si trovano già in sostanza nelle ricerche di HAMILTON sui *quaternioni,* sebbene *essi differiscano essenzialmente da questi numeri* (pei quali, com' è noto, la moltiplicazione *non* è commutativa). HAMILTON infatti osserva (ad es. negli *Elements of Quaternions,* London 1866, n. 228) che i quaternioni di un piano si possono tutti mettere sotto forma $x + iy$, ove x ed y son numeri (*scalari*) reali ed i è un *versore* retto (di quel piano) tale che $i^2 = -1$; ma dai bisogni della risoluzione delle equazioni algebriche in cui le incognite sono quaternioni, essendo poi condotto a considerare accanto ai quaternioni, ordinari o *reali,* i cui 4 coefficienti (scalari) son reali, i quaternioni *immaginari* o *biquaternioni* in cui quei coefficienti sono immaginari, ottiene per i *biquaternioni di un dato piano* la rappresentazione (Elements, N. 257):

$$x + iy = x_1 + hx_2 + i(y_1 + hy_2),$$

ove h è un *numero* immaginario tale che $h^2 = -1$. A parte la distinzione fra i significati di *versore* e di *numero* che HAMILTON attribuisce risp. ai due simboli i ed h, i suoi biquaternioni di un dato piano sono la stessa cosa che i nostri numeri bicomplessi ».

Ricordando che la moltiplicazione nel campo dei quaternioni non è commutativa, come nota il SEGRE esplicitamente, si ha che

II) *L' algebra dei quaternioni, a quattro unità, definita nel corpo reale, non è commutativa, e quindi non è equivalente all' algebra, a quattro unità, definita nel corpo reale, con la tabella* (I), *che costituisce i numeri bicomplessi introdotti da* CORRADO SEGRE.

Quando ai quattro coefficienti reali si sostituiscono coefficienti complessi, dai quaternioni si passa ai *biquaternioni,* costituenti un' algebra, a 4 unltà definita nel corpo di numeri complessi, algebra che avrà la stessa tabella di moltiplicazione di quella dei quaternioni e quindi sarà pure non commutativa, e quindi non può essere equivalente nemmeno questa all' algebra commutativa con la tabella (I) anche quando i quattro coefficienti x_1, x_2, y_1, y_2 si assumono complessi.

2. I numeri bicomplessi come elementi di un' algebra e due unità, definita nel corpo complesso.

Tenendo conto che i numeri complessi costituiscouo un corpo numerico, nella teoria moderna delle algebre i numeri bicomplessi, introdotti da CORRADO SEGRE, come elementi di un' algebra *a quattro unità,* definita nel corpo reale, sono introdotti come elementi di un' algebra *a due unità* definita nel corpo complesso. Per esempio, con le unità u e v,

date, sotto forma di matrici quadrate, da:

$$u = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad v = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

e quindi i numeri bicomplessi risultano gli elementi

$$z = xu + yv = \begin{Vmatrix} x & y \\ -y & x \end{Vmatrix}$$

con x ed y variabili nel corpo complesso. Il *modulo* è u, e *sostituisce l'unità* 1 perchè è sempre $uz = zu = z$. *L'altra unità* v *sostituisce l'unità immaginaria* i, essendo $v^2 = -u$.

Studio geologico e petrografico della zona Via Scalandrone - Punta dell' Epitaffio (Lucrino).

Nota del dott. **Renato Sinno**
presentata dal socio ordinario **Antonio Scherillo**

(Adunanza del dì 7 dicembre 1957)

Sunto. — È stato effettuato uno studio geologico e petrografico della zona compresa tra Via Scalandrone e la Punta dell' Epitaffio (Lucrino). É stata data la serie dei prodotti affioranti, ed in base ad uno studio chimico analitico si è potuto dimostrare il processo di argillificazione del tufo presente a Villa Iannon, e dei suoi relativi inclusi. Passando ai fenomeni idrotermali, presenti nella zona, è stato altresì effettuato uno studio analitico sulle incrostazioni saline deposte dalle acque termali, costituenti il bacino dei Sudatori di Tritoli.

Avendo iniziato nel 1955 uno studio sistematico chimico e petrografico sui vari prodotti dei vulcani flegrei, con il loro relativo inquadramento nella naturale successione cronologica, nel primo di questa serie di lavori ebbi ad occuparmi dei vari affioramenti presenti nel tratto costiero Bagnoli-La Pietra Pozzuoli (1). Avendo nell' anno seguente continuato le mie ricerche nel tratto Pozzuoli-Cigliano-Arco Felice (2), avrei dovuto, per una certa rigorosa continuità, occuparmi quest' anno della zona Arco Felice Monte Nuovo-Lucrino. Al contrario, l' apertura di nuove cave di pozzolana nella zona Nord Ovest del Monte Nuovo e la costruzione di nuove abitazioni sulla collina sovrastante la Punta dell' Epitaffio, mi hanno spinto a prendere in considerazione lo studio di questa zona, che, se presenta formazioni di tufo giallo e di tufo grigio, la cui interpretazione è talvolta abbastanza difficile per la sovrapposizione dei centri eruttivi, lega anche il suo notevole interesse ad una serie di fenomeni e di manifestazioni vulcaniche, che, collegate ad altre dello stesso genere, non rare nei Campi Flegrei, stanno ad attestare la presenza di un' attività vulcanica soltanto sopita e, quindi, non completamente spenta. Proponendomi di completare lo studio di quel tratto del quale non mi son potuto occupare, tratterò, nella presente nota, della stratigrafia della Punta dell' Epitaffio, mettendo in evidenza l' attività post-vulcanica di questa zona, che trova la sua più attiva espressione alle Stufe di Nerone, e che si manifesta, sia con l' alterazione fumarolica dei prodotti scoriacei, in special modo pomici, sia con la formazione di taluni minerali, deposti sotto forma di incrostazioni, lì

dove le condizioni di ambiente sono state particolarmente favorevoli alla loro genesi.

Scorrendo a volo di uccello la letteratura riguardante gli studi della zona occidentale dei Campi Flegrei, ed in senso ancora più ristretto, della zona di Baia, si può facilmente concludere che, a differenza di tanti altri vulcani flegrei, certamente meno importanti per grandezza e per potenza esplosiva, i vulcani di questo tratto, pur non meno interessante degli altri, sono stati trascurati abbastanza a lungo, per cui anche Autori di vaglia, quali A. Scacchi, Mercalli, Lacroix, per non citarne tanti altri ancora, che pur notevoli contributi apportarono allo studio dei Flegrei, accennano solo fugacemente ai crateri occidentali. Occorre giungere ai lavori del De Lorenzo (3) e del De Stefani (4) per avere nuovi accenni al gruppo craterico di Baia, e finalmente alla pubblicazione dei crateri della pozzolana del D' Erasmo per avere uno studio cronologico. Questo lavoro, stampato nel 1931, resta ancora oggi il primo contributo positivo alla morfologia ed alla cronologia delle cinte crateriche dell' arco baiano. Nei lavori di rilevamento geologico dei Campi Flegrei, sotto la direzione del Rittmann (5) nel 1949, per conto della S. A. F. E. N., il Vighi (6) ed il Falini (7) ebbero ad occuparsi della zona in questione ed i risultati di questi studi, se da un lato concordarono, in linea di massima, con le conclusioni del D' Erasmo, dall' altro lato misero in risalto l' importanza dell' idrologia sotterranea e delle manifestazioni termali, la cui osservazione costituì il punto di partenza delle ricerche per l' energia endogena, in rapporto ai fini che la S. A. F. E. N. stessa si proponeva di effettuare.

PARTE PRIMA

Zona costiera della Punta dell' Epitaffio.

a) *Descrizione stratigrafica.*

Percorrendo l' ultimo tratto della « Via Herculanea » che sotto forma di sottile fascia costiera divide il lago Lucrino dall' insenatura omonima, le prime formazioni di tufo giallo cominciano ad affiorare subito dopo Casa Bianca, nella porzione anteriore della curva che unisce Lucrino con Baia. Il tufo giallo, che si erge quasi a picco sul mare, raggiunge un' altezza di 63 metri sul livello del mare, ed in esso, a circa 20 metri di altezza, è tagliata la strada costiera (Tav. V.). Anche se ad una prima osservazione l' intera parete, dal livello del mare al limite dei prodotti pozzolaniferi grigi, sembra uniforme, una indagine più approfondita permette di osservare che non si tratta di un unico tufo, bensì di due tufi, i quali, anche se quasi identici per colorazione e per composizione chimica (come avrò

modo di osservare in seguito, discutendo sui risultati analitici ottenuti), sono, al contrario, nettamente distinti, in quanto discordanti l'uno sull'altro (Tav. III - IV - V).

Se questa osservazione potesse sfuggire, osservando la parete dalla strada, certamente non lascerebbe alcun dubbio se condotta dal mare, percorrendo il breve tratto compreso tra il lido Nerone ed i cantieri di Baia, per ritornare perfettamente chiara, quando, sulla terra ferma, ci si arrampica per l'erta scaletta che porta al limite superiore dei prodotti pozzolaniferi nella località S. Filippo. Il primo di questi due tufi, vale a dire quello inferiore, affiora dal mare subito dopo il ponte in ferro adibito al trasporto della pozzolana, che funge quasi da limite al golfo di Lucrino. Considerando questa parete nel suo punto di massimo sviluppo, il tufo inferiore raggiunge una potenza di circa quaranta metri, e si presenta stratificato, con una inclinazione degli strati in direzione Nord Ovest - Sud Est, immergendosi in direzione del mare di Lucrino. Il secondo tufo, quello superiore, è in netta discordanza col primo, e tale discordanza, se appare netta al disotto dei ruderi del palazzo di Giulio Cesare, proprio in corrispondenza della parte più avanzata della Punta dell' Epitaffio, è addirittura nettissima se la si osserva dal lato che guarda il golfo di Baia, subito dopo aver doppiato la Punta. Nel tratto di parete tufacea, compreso tra la Punta dell' Epitaffio e la casa di Menenio Agrippa, il mare ha scavato, con la sua erosione, due tipiche grotte di cui la prima, di grandezza maggiore, è sottostante al tufo giallo inferiore, mentre la seconda, che affiora a circa una ventina di metri dalla prima, è sottostante al tufo giallo superiore, che presenta un' inclinazione degli strati in direzione Nord-Est-Sud- Ovest (Tav. III).

Al disopra del tufo giallo superiore, compaiono stratificate, in sottilstrati, pozzolane grige incoerenti, che poggiano in discordanza e che raggiungono una potenza di circa venti metri nel punto di maggiore sviluppo, che trovasi al limite posteriore della curva che conduce a Baia. Il passaggio dal tufo giallo alle pozzolane grige, a parte dal cambiamento di colore, è reso evidente dalla erosione eolica che, anche se esercitata con eguale intensità su tutta la parete, ha fatto risentire le sue conseguenze in maniera più positiva nella parte superiore della parete stessa, ove, cioè, la minore compattezza delle pozzolane, ha offerto minore resistenza agli agenti eolici, recando, di conseguenza, una maggiore incisione (Tav. VI).

Prendendo ora in considerazione l' arco del golfo di Pozzuoli compreso tra La Pietra-Bagnoli e la Punta dell' Epitaffio, ed effettuando un parallelo, in base agli studi effettuati, tra i vari centri eruttivi messi in evidenza nel solo tratto costiero, si possono fare le seguenti osservazioni:

1. Volendo rispondere ad una prima impressione sommaria, si è portati ad attribuire ai vulcani orientali un'attività più costante e duratura, con conseguente aumento di sviluppo dei coni relativi, deducendo tutto ciò

dalla potenza dei banchi tufacei affioranti, che, a La Pietra ed in località « Terra » a Pozzuoli, raggiungono un notevole sviluppo, in rapporto agli stessi banchi tufacei presenti alla Punta dell' Epitaffio. Questa osservazione, ad un esame più accurato, non si rileva eccessivamente esatta. Infatti, mentre la zona occidentale del golfo di Pozzuoli fu interessata ad uno sprofondamento (ne sono prova la grande frattura presente al Monte della Ginestra [Tav. VII, fig. 2] in proprietà Maddaluno. ed il gran numero di fratture presenti nel tufo stesso), quella orientale, pur non rimanendo insensibile a tale fenomeno (infatti anche il tufo di La Pietra e di Pozzuoli è fessurato), purtuttavia non dovette essere così fortemente interessata come l' opposto versante. Tutto ciò potrebbe pertanto essere messo in relazione con un altro fatto evidente: mentre i crateri orientali sono nettamente delimitati, cratere di La Pietra-Pozzuoli, cratere del Monte Olibano, e non lasciano alcun dubbio circa la loro reale esistenza, quelli occidentali, in una fascia piuttosto ristretta, risultano sovrapposti l' uno sull' altro, con un minimo intervallo tra le esplosioni (che dovettero avvenire con una certa rapida continuità ed in modo comunque più caotico), determinando un imbasamento di nuovi crateri sui vecchi centri eruttivi, col conseguente parziale smantellamento dei coni eruttivi preesistenti. Forse per conseguenza di questa più intensa attività, (che tra l' altro rende difficile sia l' attribuzione sicura dei prodotti, sia l' ubicazione dei crateri), che dovette determinare lo svuotamento pressocchè completo dei bacini magmatici, il successivo sprofondamento interessò, con maggiore intensità, i terreni compresi nel settore occidentale dell' arco considerato.

2. Mentre nella zona orientale la formazioni tufacee sono ampiamente attraversate da numerosi solchi di erosione, taluni dei quali determinarono profondi valli, quali quelle di La Pietra (successivamente riempite dai prodotti derivanti dal disfacimento dello stesso tufo giallo ad opera delle acque superficiali, quali le pozzolane giallo-azzurrine, la cui genesi denota un lungo intervallo di calma tra la fine dei crateri di tufo giallo e l' inizio dell' attività di Agnano, cratere cronologicamente posteriore), nella zona occidentale, e precisamente al limite estremo, vale a dire all'Epitaffio, le formazioni tufacee, al limite superiore, non presentano alcun solco di erosione notevole, nè, d' altra parte, è facile osservare la presenza di deposizione di sabbie o di qualunque materiale di trasporto, se non in quantità quanto mai ridotta, mentre al contrario è facile vedere che le pozzolane grige appartenenti alle formazioni superiori e che poggiano in discordanza sul tufo, si adagiarono su di una superficie poco, o quasi nulla, turbata da erosioni superficiali. Si è portati quindi a concludere che l' intervallo di tempo intercorso tra la fine della formazione del cratere di tufo giallo e l' inizio delle esplosioni dei crateri della pozzolana grigia, dovette essere limitatamente molto breve.

3. I residui dell' intensa attività vulcanica, verificatasi in questo tratto costiero, vengono ad essere presenti ai limiti di questo arco considerato: infatti la più intensa attività post-vulcanica nei Flegrei attualmente la rinviene al cratere della Solfatara, alle Terme Puteolane, ed ai Sudatori di Tritoli.

b) *Ricerche petrografiche.*

I campioni oggetto del presente studio analitico-petrografico, riguardanti la zona costiera, sono stati raccolti nella locatità Punta dell'Epitaffio e precisamente:

1. Tufo giallo inferiore: parete tufacea sita all' atezza del ponte di ferro per il trasporto delle pozzolane, nella curva che congiunge Lucrino con Baia (Analisi N° 1. An. SINNO).

2. Incluso trachitico del tufo giallo inferiore. Proietto di color giallo rossiccio (Analisi N° 2. An. SINNO).

3. Tufo giallo superiore. Identica parete. La raccolta del materiale è stata affettuata al disopra della scaletta che conduce in località S. Filippo (Analisi N° 3. An. SINNO).

Il tufo giallo inferiore è costituito da pomici di media grandezza piuttosto poco frequenti, mentre è caretterizzato da numerosi inclusi trachitici, non molto grandi, almeno per quella parte ove è stato possibile spinger l' osservazione, con colorazione a toni giallo-rossicci. A forte ingrandimento, al binoculare, si possono osservare, nella massa cinerea, cristalli di sanidino molto minuti e lamine di mica, con qualche piccolissimo cristallo di augite, che ha assunto una colorazione verde chiara. Le pomici sono per la maggior parte alterate, di un colore bianco latte, farinose, ed osservate anche così frantumate al microscopio, lasciano scorgere, molto distintamente, la presenza di calcite abbastanza ben cristallizzata. Il tufo giallo superiore si presenta molto meno ricco di inclusi, ma, al contrario, è ricchissimo di pomici che vanno dal bianco al giallastro ed addirittura al rosa. Presentando questi inclusi pomicei un particolare interesse analitico, riferirò su queste ricerche nella seconda parte, quando tratterò della stratigrafia della zona interna.

Nella tabella seguente vengono riportati i valori analitici relativi ai due tufi ed all' incluso trachitico, con i dedotti valori di NIGGLI.

	1	2	3
SiO_2	51.30	59.60	40.80
TiO_2	0.12	0.10	0.12
ZrO_2	0.02	0.02	0.02
Al_2O_3	12.60	16.20	15.22
Fe_2O_3	5.61	4.32	4.78
FeO	0.34	0.38	0.28
MnO	0.14	0.12	0.14
MgO	1.28	1.05	1.24
CaO	3.05	3.10	6.66
BaO	0.03	0.02	0.02
K_2O	4.41	5.10	3.30
Na_2O	7.02	7.50	1.96
Cl_2	0.42	0.30	0.30
SO_3	0.38	0.40	0.41
P_2O_5	0.70	0.68	0.44
CO_2	0.12	0.13	2.20
H_2O^-	7.10	0.68	14.10
H_2O^+	5.58	0.45	8.40
	100.22	100.11	100.46
O = Cl	0.13	0.04	0.08
	100.09	100.07	100.38

Avendo quindi detratto dal CaO totale le quantità spettanti a CO_2 per considerare l' ione Ca^{++} sotto forma di $CaCO_3$, ed a P_2O_5 per considerarlo sotto forma di $Ca_3 (PO_4)_2$, ed avendo sottratto agli alcali la quantità di Na spettante a Cl, per considerare questo ione presente sotto forma di NaCl, ho calcolato i valori di Niggli, che riporto qui accanto:

	si	al	fm	c	alc	k	mg	$\frac{al}{alc+c}$	si°
1)	192	28	24	13	35	0.29	0.29	0.58	0.80
2)	214	35	18	10	37	0.30	0.30	0.80	0.86
3)	161	35	22	27	18	0.52	0.35	0.56	0.98

Aggiungo senz' altro, subito dopo il calcolo di questi valori, che l'unica serie che effettivamente possa essere presa in considerazione è quella che si riferisce alla seconda analisi, che permettono di avvicinare l'incluso ad un tipo magmatico ben definito e precisamente al tipo leucosienitico-kali-foyaitico.

Per quanto riguarda gli altri due tufi, per i quali i valori del NIGGLI hanno un valore molto relativo, i risultati analitici ottenuti, permettono, in linea di massima, di ascrivere il primo tufo al tipo normale presente nei Campi Flegrei, se si eccettua una piccola deficienza di allumina, mentre per il secondo la interpretazione dei risultati analitici permette di affermare che la costituzione chimica iniziale è stata modificata, in seguito all' azione sia delle acque termali, non rare in questa porzione dei Flegrei, sia dei gas della fumarole (come stanno ad indicare gli altri valori del CaO e della CO_2, deposti sotto forma di carbonati e quindi di calcite, ad opera delle acque recanti disciolte in soluzione i bicarbonati solubili), ed ancora più, sui bassi valori degli alcali, sia del potassio ed ancora più del sodio, il che dimostra come questo tufo sia da considerarsi più che altro come una roccia di alterazione, ad uno stadio intermedio del processo di trasformazione tufo-argilla che, come dimostrerò più innanzi, si verifica appunto nel tufo giallo superiore, presente al disotto di Villa Iannon.

PARTE SECONDA

STRATIGRAFIA DEL TRATTO LAGO DI AVERNO - VILLA IANNON.

a) *Descrizione stratigrafica.*

Nella descrizione stratigrafica di questo tratto compreso tra il lago di Averno e la Villa Iannon, terrò distinte, per maggior chiarezza, due porzioni e, più precisamente, prendendo come punto di riferimento la grande frattura presente allo Scalandrone Vecchio [1]), tratterò prima della

[1]) Lo Scalandrone Vecchio è segnato sulla Carta topografica quale limite di Comune tra l' « Amministratore » ed il « Colle della Ginestra ».

stratigrafia della zona Est (fino alle pendici che si affacciano sul lago di Averno) e, successivamente, di quella Ovest fino alla Villa Iannon.

Nel primo tratto, le formazioni di tufo giallo affiorano subito dopo la frattura dello Scalandrone, in proprietà Maddaluno, ove la grande parete tufacea raggiunge una potenza di circa quaranta metri (Tav. VII, fig. 2). Questo tufo, che è caratterizzato dallo scarsissimo contenuto di prodotti scoriacei in genere e di pomici, si presenta fortemente litoclasato in direzione Nord-Sud ed Ovest-Est, con immersione verso Est. Malgrado la sua compattezza e la sua resistenza, per le sue numerose fratture, frana a grandissìmi blocchi, nella stagione fredda, costituendo una seria e continua minaccia sia per gli abitanti, che per le culture sottostanti. Proseguendo verso il cratere dell' Averno, la formazione continua fino all' altezza quasi della proprietà Volpe, ove diviene sottostante ad un altro tipo di tufo del tutto diverso. Il limite tra le due formazioni lo si può porre a circa mezza strada tra i laghi di Lucrino e di Averno. Questo secondo tufo si presenta caratterizzato da una grana piuttosto grossa, da una forte abbondanza di inclusi, che, di grandezza molto varia, vanno dai proietti trachitici grigi od arrossati a quelli scoriacei, dai proietti di tufo verde, piuttosto frequenti nell' ultimo tratto, alle pomici di colore bianco latte, fresche e senza alcuna traccia di alterazione fumarolica. E' certamente dovuta alla sua costituzione, alla abbondanza delle pomici, la formazione delle numerose marmitte di erosione eoloica, presenti in tutto il versante che porta al cratere di Averno, ed assolutamente inesistenti nel tufo giallo compatto della proprietà Maddaluno. Sono queste di tufo giallo, le uniche formazioni che costituiscono la collina della Ginestra, al disopra delle quali poggia il terreno vegetale.

Passo ora a considerare il complesso delle formazioni che affiorano al versante ovest della zona oggetto del presente studio, e precisamente del tratto compreso tra lo Scalandrone e Villa Iannon. Provenendo da Lucrino sulla strada costiera e percorrendo l' erta salita che conduce alla parte più alta dello Scalandrone (oggigiorno notevolmente ampliata a causa dell' intenso traffico pesante collegato a sua volta all' apertura di numerose cave di nuovo esercizio, aperte in questi ultimi anni e fortemente sfruttate per le grandi richieste del mercato, dipendenti dalla bontà del materiale pozzolanifero, ritenuto il migliore tipo presente nei flegrei), le prime formazioni cominciano ad affiorare subito dopo il ristorante « Al tedesco ». Al bivio per lo Scalandrone comincia ad affiorare il tufo giallo, che si incontra lungo tutto il tratto di strada fino alla curva che conduce alle prime cave di pozzolana, ove si immerge verso Est in direzione della frattura tra la collina della Ginestra e l' « Amministratore », raggiungendo il suo massimo sviluppo a venti metri prima della curva.

Nella sezione che è presente a circa cinquanta metri dallo Scalandrone (Tav. VIII fig. 2) dal basso verso l' alto si può osservare la seguente serie:

a) Tufo giallo ricco di scorie, di pomici e di inclusi di varia natura (potenza dello strato affiorante: metri 4.50);

α) humus;

b) pomici e scorie di varia grandezza separate da un sottile strato di pozzolana grigia grossolana (potenza dello strato: metri 4);

β) fascia di humus molto sviluppata;

c) pozzolane finissime di colore bianco latte (potenza: metri 1.70);

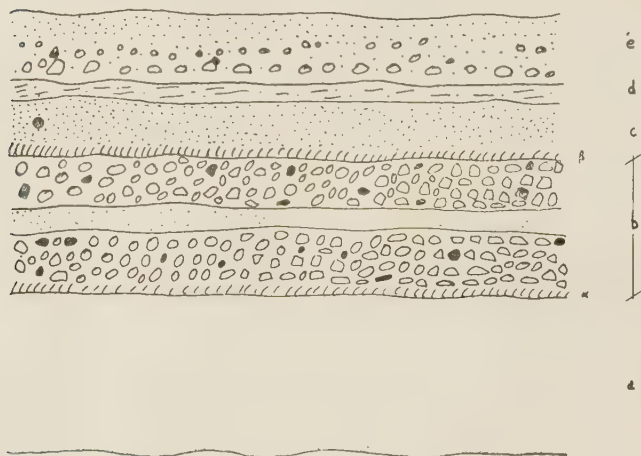



Fig. 1. — Serie stratigrafica di Via Scalandrone. (Per la didascalia vedi testo).

d) sabbie e materiali vari di riporto (potenza: di pochi centimetri);

e) pomici e scorie che al limite superiore sfumano nelle pozzolane grossolane miste a piccole pomici (potenza dello strato: metri 2).

Alla curva dello Scalandrone la serie è perfettamente identica, ad eccezione del tufo, che scompare, immergendo verso Est, qualche metro innanzi. Ma proseguendo per la nuova strada, dove sono state aperte le nuove cave, alla scomparsa del tufo giallo e delle pozzolane chiare stratificate, corrisponde l'aumento della potenza degli strati di pomici, che si uniscono in un unico strato, scomparendo le pozzolane interposte. A questo punto ho posto il limite del presente lavoro, proponendomi di trattare nel prossimo la stratigrafia del tratto Averno-Monte Rosso-Cuma. Ma, per completare l'illustrazione della zona di cui vado occupandomi, devo adesso riferire sulla stratigrafia della propaggine sottostante alla Villa Iannon, che è stata sempre interpretata quale estremo limite della terrazza de « La Starza ». Fu infatti il De Lorenzo (8) a considerare questa formazione come facente parte di detta terrazza, formatasi in ambiente

marino, in seguito alla erosione del tufo giallo del cratere del Gauro. In realtà però, questa formazione, che raggiunge nel punto di maggiore sviluppo una quindicina di metri, risulta costituita, almeno in quei tratti in cui la mano dell'uomo non è giunta ancora con la sua opera rinnovatrice, da tre potenti letti di pomici, a superficie molto fresca, per la maggior parte chiare, cavate dai locali per essere impiegate come abrasivi (Tav. VIII, fig. 1). A parer mio, l'origine marina di questa terrazza è completamente da escludersi: la natura stessa dei prodotti costituenti la formazione in questione lo esclude. Essendo costituita interamente da pomici angolose, ciò è già sufficiente per attribuirle una origine subaerea: infatti i prodotti scoriacei, ed in special modo poi le pomici, non possono per la loro stessa leggerezza, sedimentarsi in massa in ambiente marino, in quanto son portate a galleggiare sull'acqua, cosa che è in netto contrasto con la sedimentazione. D'altra parte poi le pomici presentano spigoli molto vivi, la loro superficie è perfettamente fresca, non vi è traccia alcuna di un arrotondamento dovuto a trasporto, le cavità risultano perfettamente libere, nè quindi in esse si nota presenza di sabbia o di qualsiasi altro prodotto, in rapporto all'ambiente marino. C'è piuttosto da notare che questa formazione trovasi per posizione ad un livello più basso sia rispetto alle pomici inferiori affioranti allo Scalandrone, sia sopratutto rispetto al tufo giallo, al quale è, senza dubbio alcuno, posteriore. Data come acquisita la perfetta corrispondenza tra gli strati di pomici inferiori, presenti alla sezione dello Scalandrone, e quelle costituenti la formazione, che trovasi ad un dislivello di circa trenta metri più in basso (osservazione convalidata non solo dalla eguaglianza delle pomici, ma anche dalla interposizione tra i banchi di uno strato di pozzolana piuttosto grossolana), la spiegazione di un tale dislivello, per le due identiche formazioni, è da ricercarsi negli eventi che seguirono la formazione dei crateri di tufo giallo, e precisamente negli sprofondamenti che si verificarono (come, ad esempio, quello che si nota con tanta evidenza allo Scalandrone) e che recarono, di conseguenza, la formazione di ampi terrazzamenti nel tufo, permettendo lo sviluppo di quelle superfici a gradini, su cui potettero adagiarsi i prodotti delle esplosioni successive. Se, passando ad altre considerazioni di ordine diverso, si pensa che l'uomo cerca, per le sue costruzioni, di sfruttare al massimo le condizioni naturali del terreno, la zona in esame, e tutta quella compresa tra Lucrino e Baia, serve da esempio per una tale affermazione. Infatti ai Romani che valorizzarono enormemente questo meraviglioso lembo di terra, non sfuggì tale principio, grazie al quale, sgombrata facilmente l'area adibita alle costruzioni, dalla presenza dei materiali pozzolanici posteriori, potettero mettere molto facilmente allo scoperto la superficie del tufo giallo, spianando quelle già naturalmente presenti, nel tufo stesso, superfici nelle quali affondarono le fondazioni delle numerose ville ed edifici per le cure termali, tutte costruzioni queste, che non a

caso, per tutto l'arco di costa compreso tra Lucrino e Baia, si trovano quasi tutte allineate ad una stessa altezza.

Passando ora alla stratigrafia del tratto compreso tra il bivio dello Scalandrone e Villa Iannon, le prime formazioni che compaiono, pochi metri dopo il bivio, sono di tufo giallo, che, oltre che per analogia, sopratutto per posizione, è il tufo che costituisce la porzione inferiore della Punta dell'Epitaffio. A circa duecento metri prima di giungere alla Villa Iannon si osserva una discordanza, al disopra della quale, poggia il tufo giallo superiore, per posizione certamente identificabile con quello superiore dell'Epitaffio, ma non certo per aspetto, nè per analogia. Su questo tufo, la cui particolarità dell'aspetto ha attirato subito la mia attenzione, ho condotto un particolare studio analitico, del quale tratterò tra non molto. Prendendo come punto di riferimento una grotta che trovasi alla sommità della salita che conduce proprio sotto Villa Iannon (Tav. IX, fig. 1, 2), dal basso verso l'alto, compare la seguente serie:

a) tufo giallo superiore, fortemente fumarolizzato (potenza dello strato affiorante: metri 4);

b) scorie e pomici di varia grandezza con pozzolane grossolane interposte (potenza: metri 1.50);

c) pozzolane grossolane frammiste a pomici piccolissime e scorie molto minute, entrambe fortemente arrossate (potenza: metri 2);

d) pozzolane frammiste a terreno vegetale.

Se questo tratto del versante interno, quindi, non presenta, in linea di massima, nessuna grande variazione rispetto ai prodotti affioranti o nel tratto costiero, o nel versante del colle della Ginestra, purtuttavia presenta un notevole interesse per quanto riguarda la presenza di un tufo giallo particolare, vale a dire di un tufo giallo, che ha perduto tutte le caratteristiche di una roccia piroclastica e, ancor più, tutte le proprietà di un tal tipo di roccia. Esso infatti si presenta pastoso, si sgretola facilmente, si stacca dalla parete con grande facilità e, racchiuso nella mano, si modella, diventando oltremodo plastico, così come può diventare plastica una roccia argillosa, impastata con acqua. E' molto difficile poter rinvenire in altri punti dei Campi Flegrei un siffatto tipo di roccia, anzi posso affermare con tutta certezza, che la zona di Villa Iannon può essere considerata la sola dei Flegrei quale zona in cui il processo di argillificazione del tufo giallo trova la sua più brillante conferma, e ciò perchè questa zona é stata per il passato eminentemente fumarolica, continuamente soggetta all'azione dei vapori, che esercitarono la loro influenza non solo per quanto riguarda l'alterazione del tufo, ma anche, e con una marcata intensità, sugli inclusi del tufo stesso, sui prodotti soprastanti al tufo, come stanno a dimostrare sia la colorazione delle scorie, che risultano fortemente arrossate, sia, ancor più, la colorazione delle pomici, che è passata

dal bianco latte al rosa, ed il loro relativo aspetto farinoso, tanto farinoso da divenire polvere finissima al semplice contatto con le mani.

Prima di passare alle ricerche petrografiche, pur non volendo entrare nel campo dell'attribuzione dei prodotti, nè in quello dell'ubicazione dei centri eruttivi, in quanto troppo ristretti sono i limiti della zona considerata, ritengo opportuno fare delle considerazioni, che, per quanto generali, saranno i punti di partenza del mio prossimo lavoro di completamento della stratigrafia della zona occidentale dei Campi Flegrei. Le osservazioni condotte sulla zona compresa tra lo Scalandrone Vecchio e Villa Iannon ed altresì quelle condotte sul tratto costiero della Punta dell'Epitaffio, hanno permesso di accertare la presenza di due tufi, ai quali vanno ad aggiungersi gli altri due tipi, quello compatto e quello caotico, costituenti il colle della Ginestra. Inoltre la presenza di una profonda litoclasi nel tufo giallo compatto, costituente il primo tratto del colle della Ginestra, che risulta profondamente diviso da quello costituente la parte di base dello Scalandrone Vecchio, fa pensare ad un fenomeno di sprofondamento che interessò buona parte di questa zona, successivamente alla formazione degli stessi crateri di tufo giallo. In questa profonda frattura, come anche in quella presente al versante est del colle della Ginestra, vennero convogliate le acque di dilavamento, che, scavando delle valli a lume molto stretto, tipo cañons, trasportarono, dopo averlo strappato con la loro azione meccanica, tutto il materiale derivante dalla disgregazione del tufo, accumulandolo nei punti di confluenza del bacino, nel quale andarono ad immettersi. Tale bacino, nel caso in esame, è rappresentato dal Lago Lucrino, sulla cui riva settentrionale, sono visibili due conoidi di deiezione di diversa grandezza in rapporto alla portata delle acque, e, perfettamente allineate, in corrispondenza delle due maggiori fratture dell'entroterra (Tav. VII, fig. 1). Passando ai prodotti soprastanti al tufo, si può argomentare che mentre le prime pomici, quasi certamente, appartengono ad un cratere della zona occidentale, non altrettanto può affermarsi per le pozzolane chiare superiori, le quali, al contrario delle pomici, che aumentano dirigendosi verso est, scompaiono addirittura procedendo nella stessa direzione, il che provvisoriamente permette di affermare che tali prodotti possono anche rappresentare una formazione legata ad un atto eruttivo di un vulcano della zona orientale.

La fascia di humus sta naturalmente ad indicare un periodo di inattività, che peraltro non dovette essere molto lungo a giudicare dallo spessore dell'humus stesso.

Le pomici e le pozzolane grossolane, soprastanti all'humus, sono, con tutta certezza, appartenenti ad un vulcano occidentale. In definitiva, concludendo, si può tracciare la seguente serie, includendo tutti i prodotti rinvenuti e studiati:

a) tufo giallo compatto inferiore;

b) tufo giallo superiore;

c) pomici chiare grossolane con pozzolane interposte che sfumano nelle pozzolane grige;

d) pozzolane chiare finissime;

e) pomici e scorie, a cui seguono le pozzolane grossolane stratificate.

b) *Ricerche chimico-petrografiche.*

Le ricerche chimico-petrografiche condotte sui prodotti presenti nel versante interno della zona Scalandrone-Villa Iannon sono risultate particolarmente interessanti soprattutto perchè l' indagine chimica (a cui ho fatto seguire una termoponderale per convalidare ancor più i risultati ottenuti per via analitica, già di per sè stessi molto eloquenti) ha permesso di accertare e dimostrare il processo di argillificazione del tufo giallo, che, anche se intuito e riportato quale esempio classico da diversi Autori, non era stato mai chimicamente dimostrato per i Campi Flegrei.

Considerando in primo luogo il tufo giallo dello Scalandrone Vecchio, si osserva che esso ha mantenuta integra la sua compattezza. Esso però si presenta tappezzato da un sottile velo bianco latte, dovuto ad incrostazioni, sulla cui natura mi riservo di riferire in una comunicazione a parte, essendo risultata penosa la raccolta, tanto da non permettere il raggiungimento di quella quantità indispensabile, occorrente per un' analisi chimica completa di tutti i componenti. La deposizione di queste incrostazioni sul tufo non è rara, ma, in questo particolare tratto, è in relazione alla esistenza di una grande vasca di acqua termale, denominata Vasca di Pollio. Queste acque sono carbonicate, considerando la effervescenza che si produce quando vengono agitate. E' certo anche che, per il passato, dovettero essere ben più calde di quanto non lo siano attualmente, a giudicare dal numero dei locali circostanti alla vasca e interpretati come i resti di un grande stabilimento termale che sfruttava il loro alto valore terapeutico.

Per quanto la formazione di queste incrostazioni stia ad indicare un' attività termale piuttosto cospicua, purtuttavia, per quanto intensa sia stata, essa non riuscì ad esercitare su questo tufo alcuna profonda modificazione, perchè, anche se incrostato, resistette sia all' azione disgregatrice delle acque che a quello dei gas in esse disciolti.

Considerando ora il tufo presente sotto Villa Iannon, che, come ho già detto prima, è corrispondente al tufo superiore dell' Epitaffio, si vede subito che l' azione fumarolica si estrinsecò in tutta la sua più continua ed intensa attività, provocando la profonda modificazione del tufo e la relativa trasformazione in argilla, unitamente ad i suoi inclusi. Non così alterato si presenta il tufo giallo sottostante, e le pomici in esso incluse, pur tendendo al rosa, non sembrano ad occhio nudo molto modificate:

si presentano meno farinose anche se non compatte, con i vacuoli riempiti di cristallini di calcite, come ho potuto osservare al binoculare, al massimo ingrandimento. Per lo studio analitico ho preso in considerazione i seguenti campioni, raccolti nella zona di Villa Iannon, e precisamente:

4) Tufo giallo superiore, profondamente alterato (Analisi N° 4 — An. Sinno);

5) Pomici di colore rosa, tipicamente farinose, incluse nel tufo giallo superiore alterato (Analisi N° 5 — An. Sinno);

6) Pomici di colore giallo-rosa, apparentemente inalterate, facenti parte del tufo giallo inferiore (Analisi N° 6 — An. Sinno).

Nel quadro seguente riporto i valori analitici ottenuti.

	4	5	6
SiO_2	46.70	42.44	25.12
TiO_2	0.06	0.05	0.24
ZrO_2	0.02	tracce	0.04
Al_2O_3	17.80	15.14	6.08
Fe_2O_3	3.90	3.82	5.34
FeO	0.16	0.14	0.38
MnO	0.14	0.22	0.10
MgO	1.16	1.16	1.10
CaO	5.62	5.02	29.22
BaO	0.02	0.02	0.02
K_2O	0.26	1.30	1.20
Na_2O	0.02	4.28	2.35
Cl_2	0.33	0.22	0.85
SO_3	0.25	0.27	0.21
P_2O_5	0.40	0.44	0.42
CO_2	0.30	0.15	22.02
H_2O^-	1.05	1.25	1.58
H_2O^+	22.25	24.30	4.02
	100.44	100.22	100.29
O=Cl	0.08	0.06	0.21
	100.36	100.16	100.08

Sulla scorta dei risultati analitici ottenuti, prendendo in considerazione taluni particolari valori chiaramente indicativi, e confrontando l'analisi del tufo giallo dell'Epitaffio con quello alterato di Villa Iannon, si possono dedurre le seguenti considerazioni:

1) La quantità globale di acqua cresce da un valore del 13.68 % al 23.30 % dal primo al secondo, mentre quello della silice decresce passando dal 51.30 % al 46.70 %.

2) Mentre la quantità di allumina aumenta sensibilmente, passando da un valore del 12.60 % al 17.80 %, la quantità degli alcali, che nel primo tufo raggiunge un valore globale del 11.43 %, decresce fino a raggiungere l'esiguo valore globale del 0.26 %.

3) Calcolando i relativi rapporti molecolari per i componenti delle analisi nn. 4 e 5, si osserva che l'allumina presente lega quasi totalmente la silice, per costituire i silicati idrati del gruppo del caolino, mentre l'acqua è in forte eccesso.

L'insieme di tutte queste osservazioni converge in una stessa conclusione, quale può essere la dimostrazione del processo di argillificazione del tufo, dovuto, per la massima parte, all'azione del vapor d'acqua e della anidride carbonica delle fumarole [1]). Che trattasi effettivamente di una argilla, che ben si presta alla lavorazione ed al processo di cottura, lo sta a dimostrare anche lo sfruttamento, che è stato fatto per il passato: infatti in questa zona, tempo addietro, fiorì una piccola industria di ceramiche, attualmente distrutta, che adoperava quale materia prima il tufo argillificato di Villa Iannon.

Per quanto riguarda le pomici con calcite del tufo giallo inferiore, bisogna ammettere una azione idrotermale con un successivo deposito dalle soluzioni del carbonato insolubile, in seguito alla perdita della anidride carbonica, che, in questa zona, può facilmente esser messa in relazione alle frequenti variazioni termiche.

Per quanto riguarda infine le pomici rosa, mentre anche per quest'ultime è chiaro un processo di argillificazione, il tenore di manganese, più elevato nei confronti del tufo e delle altre pomici od inclusi, ci fa pensare ad un aumento della concentrazione di tale elemento, sulle cui cause determinanti sarebbe troppo lungo discutere in questa sede.

---

[1]) L'analisi termoponderale eseguita, nell'Istituto di Chimica Industriale della Università di Napoli, dal prof. Riccardo SERSALE, ha messo in evidenza, in questo particolare tipo di tufo, la presenza di una notevole quantità di prodotti amorfi.

PARTE TERZA

Attività post-vulcanica della zona. Le incrostazioni saline dei Sudatorî di Tritoli.

I residui della copiosissima attività fumarolica, che tanta influenza ebbe sull' alterazione dei prodotti presenti nella zona studiata, sono ancora oggi manifesti alle Vasche di Pollio, [1]) sulla riva occidentale del Lago Lucrino e, soprattutto, ai Sudatorî di Tritoli, in prossimità della Punta dell' Epitaffio. Questi Sudatorî fanno parte di quel grandioso complesso

Fig. 2. — Ingresso ai Sudatorî di Tritoli (Stufe di Nerone).

termale, che, costruito per lo sfruttamento delle acque, furono considerate le terme imperiali per eccellenza, da cui il nome di Stufe di Nerone. Essi vengono chiamati « Sudatorî di Tritoli », dalla collina omonima, che, a sua volta, costituisce un residuo craterico, tuttora sede di una notevole attività fumarolica. Essa, infatti, è attraversata da numerosi spiragli che si aprono nel suolo, attraverso i quali si sprigiona vapor d' acqua, misto ad una piccola quantità di anidride carbonica. Per questa ragione è anche chiamata « Rione delle Mofete ». Dopo quelle della Solfatara, in queste fumarole si riscontrano le più alte temperature dei Campi Flegrei. Le misure effettuate da Signore (9), da Parascandola (10-11-12-13-14) e da D' Erasmo (15) hanno riscontrato temperature che oscillano intorno ai 100°. I sondaggi, effettuati più di recente da parte della S. A. F. E. N., anche

---

[1]) Sulla Carta topografica la maggiore delle due vasche di Pollio è riportata con l' indicazione: sorgente.

dove in superficie non si avevano manifestazioni termali, hanno riscontrato nel sottosuolo della collina temperature piuttosto elevate, quasi ovunque superiori ai 50°, anche a pochi metri di profondità (16-17). Le fumarole presenti alle Stufe di Nerone, invece, presentano temperature comprese tra 27°-45°-87°, come risulta dai dati di PARASCANDOLA (18).

Secondo una descrizione di MAIURI (19), le Stufe di Nerone facevano parte di un grandioso impianto termale che copriva tutto il fianco della collina prospiciente il mare di Lucrino e giungeva fino al mare: una stampa del XVII secolo ci mostra l' edificio costituito da almeno quattro piani. Attualmente, sia lo sfaldamento naturale della collina, dovuto all' azione dei mari e dei venti, sia quello dovuto alla mano dell' uomo, che ha tagliato la collina stessa, per la costruzione della strada litoranea, hanno distrutto buona parte della costruzione. Resta però, a mezza costa, a circa dieci metri dell' attuale livello di strada, tutto scavato nel tufo giallo dell' Epitaffio, il sudatorio, che faceva parte integrante dell' antica Terma. Questo *sudatio* risulta costituito da cinque ambienti rettangolari, scavati nel tufo, le cui pareti e la volta, ricoperte un tempo da stucchi ed intonaci di alto pregio, come risulta da antichi documenti, si presentano attualmente logorate dal tempo e dalle vicende di varia natura, che hanno trasformato gli ambienti, da stalla a ricovero antiaereo, da deposito di benzina ad... abitazione per i senza tetto del Comune di Bacoli, dalla cui giurisdizione dipende.

Volendo tralasciare la descrizione degli ambienti del sudatorio, cosa questa già egregiamente compiuta dagli studiosi di archeologia, che hanno interpretato la funzione dei singoli ambienti con le relative azioni in essi svolte, mi sembra utile, oltre che nuovo, riportare ed illustrare l' ubicazione dei cunicoli, di quelle piccole gallerie che conducono al bacino termale, da cui si originano i vapori caldi che, attraverso una rete di condotti di ogni dimensione, giungevano e giungono tuttora, fino alle stanze del sudatorio. Infatti, mentre abbondano le varie descrizioni della parte architettonica del sudatorio di Tritoli, manca completamente, a quanto mi consta, una descrizione che possa dare l'idea di come si possa giungere al bacino idrotermale delle Stufe di Nerone, sede tuttora di una profondissima attività. È quello che mi appresto a fare, essendomi, non senza sacrifizio, reso conto personalmente della configurazione di quei luoghi, che, per la grande quantità dei vapori presenti, sono di difficile accesso. L' oscurità completa, la grande copia dei vapori, l' acqua gocciolante dalle pareti, il terreno sdrucciolevole, il ristretto lume dei cunicoli, che raggiungono l' altezza massima di un metro e cinquanta e la larghezza di un metro circa, e che va progressivamente diminuendo, sono tutti fattori che ne impediscono speditamente l'accesso, rendendo problematico lo studio dei vari fenomeni che si svolgono in prossimità del bacino stesso.

Ai due lati del sudatorio si dipartono due cunicoli, di cui il primo,

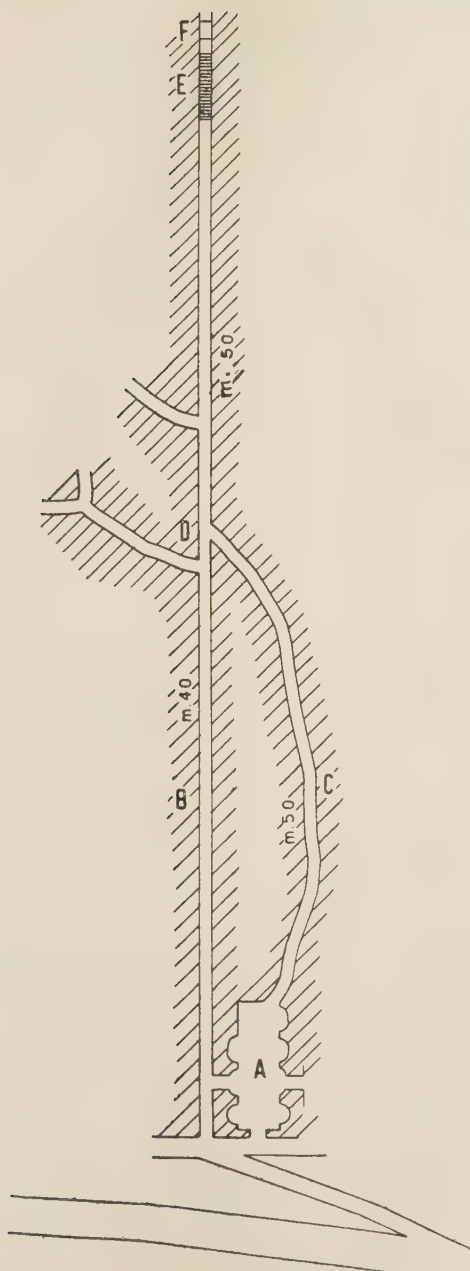



Fig. 3.

Planimetria delle gallerie del Sudatorio di Tritoli.

A. — Sudatorî

B, C, D. — Gallerie d' accesso alla sorgente, con diverticoli.

E. — Scalini di accesso al pozzo.

F. — Pozzo d' acqua termale.

quello del lato ovest, che peraltro è anche in comunicazione con l' esterno, poggia verso nord-ovest, e, pur restringendosi di poco, si mantiene perfettamente rettilineo, congiungendosi, dopo circa cinquanta metri, con il cunicolo del lato est, il quale, descrivendo una curva, è di lunghezza leggermente maggiore. Nel punto di confluenza di questi due bracci il procedere innanzi diviene problematico. Il percorso diventa inclinato, il terreno viscido, il lume del cunicolo stretto, e, quello che più dà fastidio, soprattutto alla respirazione, è il forte, violento e caldo getto di vapori che investe l' intera persona.

Comunque, proseguendo ancora per altri quaranta metri, si giunge ad una serie di trenta scalini scavati nel tufo, alla base dei quali vi è il bacino termale, sulle cui dimensioni, ad onor del vero, non potrei essere molto preciso. Posso però affermare che il livello di queste acque calde non è mai lo stesso: essendo pervenuto a questo bacino per quattro volte, nella stagione calda ed in quella invernale, non ho mai potuto contare lo stesso numero di gradini, che raggiunge il valore massimo di trenta, almeno limitatamente alle mie esplorazioni, e che evidentemente sta a rappresentare il livello più basso a cui giungono le acque termali, in rapporto sia all' apporto delle acque piovane, sia alla maggiore o minore attività della sorgente stessa, ipotesi queste entrambe formulabili ed accettabili. Variando il livello delle acque nelle diverse stagioni, questa oscillazione ha permesso alle acque di depositare sia sulle pareti, ma sopratutto sui gradini raggiunti e poi abbandonati di nuovo, una sottile patina biancastra che, stendendosi in alcuni punti per lo spessore di qualche millimetro, in seguito a paziente raccolta, mi ha fornito la possibilità di prelevare una quantità tale da essere sufficiente per uno studio analitico, sia qualitativo che quantitativo.

L' esplorazione dei cunicoli mi ha inoltre permesso di accertare che il primo vero forte investimento dei vapori lo si avverte proprio all' incrocio dei due cunicoli che conducono al bacino idrotermale: infatti per i primi quaranta o cinquanta metri si avverte più un aumento di temperatura che una forte emissione di vapori, i quali giungono al sudatorio, attualmente, molto diminuiti d' intensità ed anche troppo freddi per far sudare. Si può quindi dedurre, che, come è scemata in questi ultimi tempi, l' emissione delle acque termali, così deve essere anche diminuita la temperatura. Ben altra doveva essere infatti, nei tempi ormai andati, l' intensità del flusso dei vapori e la relativa temperatura, quando fu scavato il sudatorio. Del resto, poi, la diminuzione della temperatura deve essere anche collegata al numero delle sorgenti termali, che, ridotto attualmente ad un' unica e sola, dovette essere ben più elevato, a giudicare anche dal contenuto dell' epitaffio fatto affiggere dal vicerè Pietro d' Aragona, durante la dominazione spagnola, all' entrata del sudatorio di Tritoli, epitaffio che, lodando le virtù terapeutiche delle acque, metteva anche in

evidenza il copioso numero di sorgenti sgorganti ai piedi della collina, su cui si ergevano le Stufe di Nerone. Il che potrebbe spiegarsi con il graduale interramento delle sorgenti, in relazione ai fenomeni bradisismici.

Avendo proceduto innanzi tutto ad una completa, o pressochè completa, purificazione della incrostazione raccolta, ho proceduto prima ad un' analisi qualitativa per uno scopo orientativo, al fine dei metodi da applicare per la ricerca quantitativa degli ioni accertati.

La ricerca qualitativa mi ha permesso di accertare la presenza abbondantissima dello ione Cl^- e, subordinatamente, dello ione SO_4^{--}. Assente è risultato l' ione CO_3^{--}. Nella tabella analitica seguente vengono riportati i valori dell' analisi chimica quantitativa.

Analisi (7") della incrostazione presente in prossimità del bacino idrotermale del Sudatorio di Tritoli alla Punta dell' Epitaffio (Lucrino) (An. Sinno):

SiO_2	0.12
Al_2O_3	1.12
Fe_2O_3	0.80
MgO	0.12
CaO	1.08
Na_2O	50.04
K_2O	1.42
SO_3	1.70
Cl_2	57.41
H_2O^-	0.02
H_2O^+	0.82
Resid. Insol.	0.08
	114.36
O=Cl	14.35
	100.01

La determinazione del Cloro è stata effettuata con i metodi di Mohr e di Volhard. L' acqua è stata determinata con il metodo di Brusch-Penfield. Il restante dei componenti è stato ricercato per via ponderale.

Calcolando ora, per i singoli componenti, i rispettivi rapporti molecolari, e, raccogliendo in due gruppi distinti gli ossidi e le anidridi, si ha:

Al_2O_3 = 0.011	SO_3 = 0.022	H_2O = 0.045
Fe_2O_3 = 0.005	Cl_2 = 16.170	
CaO = 0.019		
MgO = 0.003		
Na_2O = 0.807		
K_2O = 0.015		

Legando a ciascuna anidride la corrispondente quantità di ossido, si può ammettere che l'incrostazione in questione risulta costituita dai seguenti sali: salgemma, silvite e, subordinatamente, gesso ed epsomite.

Infatti, legando, si ha:

$NaCl$	Na_2O = 0.807	2 HCl = 16.140	
KCl	K_2O = 0.015	2 HCl = 0.030	
$CaSO_4.2H_2O$	CaO = 0.019	SO_3 = 0.019	$7H_2O$ = 0.038
$MgSO_4.7H_2O$	MgO = 0.003	SO_3 = 0.003	$2H_2O$ = 0.021

Passando alle percentuali, si può concludere che l'incrostazione risulta costituita, in prevalenza, da salgemma (93 % circa) e, subordinatamente, da silvite (2 % circa), da gesso (3 % circa), ed infine da epsomite (0.60 %). La composizione della miscela salina analizzata è ovviamente da rapportare alla composizione chimica delle acque, da cui viene generata.

Essendo impossibile la raccolta di una quantità di acqua tale da poter effettuare un'analisi chimica completa, allo scopo di mettere in rapporto le varie percentuali dei componenti l'incrostazione, con quelli ovviamente presenti nell'acqua madre generatrice, ritengo opportuno riportare alcuni interessanti dati forniti da Sersale (20) circa il valore di taluni costituenti di un'acqua ipertermale, incontrata durante una trivellazione profonda nella zona del lago Fusaro. I costituenti della mineralizzazione delle acque esaminate risultarono effettivamente quelli dell'acqua marina; non così, invece, i rapporti tra i costituenti, senz'altro diversi da quelli che normalmente caratterizzano la mineralizzazione delle acque del mare. I rapporti: sodio/cloro, potassio/cloro, calcio/cloro, magnesio/cloro, per queste acque ipertermali del Fusaro, furono nettamente diversi da qnelli normalmente presenti in un'acqua marina, e più precisamente, mentre il valore del rapporto sodio/cloro si deve considerare notevolmente superiore per le acque in questione rispetto a quelle del mare, notevolmente inferiore risulta invece la quantità di magnesio, di calcio e di solfati, componenti di cui l'acqua del mare è più ricca.

Ora poichè nella incrostazione da me analizzata, riportata dalla composizione chimica di un'acqua marina, io riscontro le stesse anomalie, devo concludere, in linea di massima, ed in attesa di poter raccogliere ed analizzare le acque, che il tipo di acque, da cui si originano le incrostazioni dei Sudatorî di Tritoli, sia dello stesso tipo di quelle ipertermali, rinvenute, in seguito a sondaggio ad 800 metri di profondità, nella zona del Lago Fusaro.

CONCLUSIONI

La serie dei prodotti rilevati nella zona Via Scalandrone - Punta dell'Epitaffio (Lucrino), ed il relativo studio analitico-petrografico, permettono di trarre le seguenti conclusioni:

1. Il secondo periodo flegreo è in questa zona ampiamente rappresentato da almeno tre diversi tipi di tufo giallo, dei quali i primi due, in discordanza l'uno sull'altro, sono presenti alla Punta dell'Epitaffio, mentre il terzo, notevolmente diverso, in quanto caotico e ricchissimo di inclusi, è presente ai confini orientali del Colle della Ginestra.

2. L'attività dei centri eruttivi della zona occidentale flegrea dovette essere intensa e consecutiva, sovrapponendosi nuove bocche alle vecchie ancora attive.

3. Il terzo periodo flegreo, oltre ad essere rappresentato dai centri eruttivi, propri di questa zona, include forse anche prodotti di vulcani dell'opposto versante.

4. La zona fu interessata da uno sprofondamento, come sta a dimostrare la frattura dello Scalandrone che divide l'Amministratore dal Colle della Ginestra.

5. La zona dovette essere interessata anche da notevoli fenomeni bradisismici, grazie ai quali si può spiegare l'interramento di numerose sorgenti ipertermali.

6. La zona, oltre a presentare una notevole attività idrotermale, presenta anche, e dovette presentare molto più intensamente per il passato, una profondissima attività fumarolica, che operò il processo di argillificazione del tufo e dei suoi inclusi, come sta a dimostrare l'analisi del tufo di Villa Iannon.

7. Le incrostazioni presenti nel bacino idrotermale dei Sudatori di Tritoli vengono deposte da un tipo di acqua termale, le cui incrostazioni presentano una forte prevalenza di cloruro sodico.

Napoli, Istituto di Mineralogia dell' Università, Novembre 1957

BIBLIOGRAFIA

1) SINNO R. *Studio geologico e petrografico della zona M. Olibano - Pozzuoli.* Rend. Acc. Sc. fis. e mat., serie 2ª, Vol. XXII. Napoli, 1955.

2) SINNO R. *Studio geologico e petrografico della zona Pozzuoli - Cigliano - Arco Felice.* Rend. Acc. Sc. fis. e mat., serie 4ª, Vol. XXIII. Napoli, 1956.

3) DE LORENZO G. *I crateri di Miseno nei Campi Flegrei.* Atti R. Acc. Sc. fis. e mat., serie 2ª, vol. XIII. Napoli, 1905.

4) DE STEFANI C. *Die phlegraischen Felder bei Neapel.* Petermanns Mitteil. Erganzungsh. 156. Gotha, 1907.

5) RITTMANN A. *Sintesi geologica dei Campi Flegrei.* Boll. Soc. Geol. It., vol. LXIX. Roma, 1950.

6) VIGHI L. *Rilevamento geologico della zona a sud del parallelo di Baia e della zona di Nisida - Coroglio - Trentaremi nei Campi Flegrei.* Boll. Soc. Geol. It., vol. LXIX. Roma, 1950.

7) FALINI F. *Rilevamento geologico della zona nord-occidentale dei Campi Flegrei.* Boll. Soc. Geol. It., vol. LXIX. Roma, 1950.

8) DE LORENZO G. e SIMOTOMAI H. *I crateri del Monte Gauro nei Campi Flegrei.* Atti R. Acc. Sc. fis. e mat., serie 2ª, vol. XVI. Napoli, 1915.

9) SIGNORE F. *Contributo allo studio geofisico della Solfatara, del rione delle Mofete, Stufe di Nerone.* Ann. Oss. Ves., serie 3ª, vol. I. Napoli, 1924.

10) PARASCANDOLA A. *Osservazioni di temperatura nei Campi Flegrei: 17 Luglio 1929.* Boll. Flegreo, Anno V. Napoli, 1930.

11) PARASCANDOLA A. *Osservazioni di temperatura nella zona Rione delle Mofete - Fusaro: 11 Agosto 1931.* Boll. Flegreo, Anno V. Napoli, 1931.

12) PARASCANDOLA A. *Osservazioni di temperatura nei Campi Flegrei.* Boll. Soc. Nat., Vol. XLVII. Napoli, 1935.

13) PARASCANDOLA A. *Il rione delle Mofete nei Campi Flegrei.* Boll. Soc. Nat., vol. XLVIII. Napoli, 1936.

14) PARASCANDOLA A. *Su di alcune misure di temperatura eseguite nel rione delle Mofete e nel cratere del Monte Nuovo nei Campi Flegrei.* Boll. Soc. Nat., vol. XL. Napoli, 1928.

15) D'ERASMO G. *I crateri della pozzolana nei Campi Flegrei.* Atti R. Acc. Sc. fis. e mat., serie 2ª, vol. XIX. Napoli, 1931.

16) PENTA F. *Temperatura nel sottosuolo della regione flegrea.* Annali di Geofisica, vol. II. Roma, 1949.

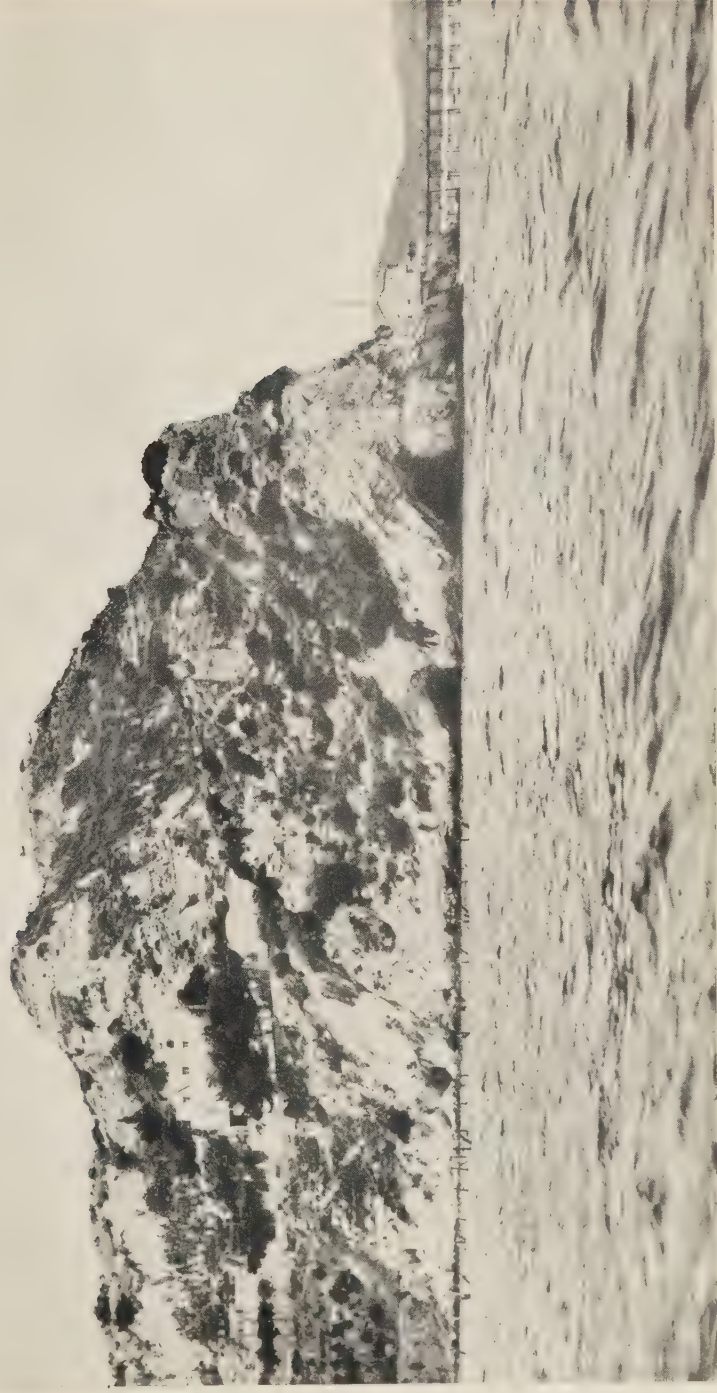
17) PENTA F. e CONFORTO B. *Risultati di sondaggi e di ricerche geo-minerarie nei Campi Flegrei, per vapori, acque termali e forze endogene in generale.* Ann. Geof., vol. IV. Roma, 1951.

18) PARASCANDOLA A. *Il Monte Nuovo ed il Lago Lucrino.* Boll. Soc. Nat., vol. LV. Napoli, 1946.

19) MAIURI A. *I Campi Flegrei.* Libreria dello Stato, 1934.

20) SERSALE R. *Sulla presenza di notevoli quantità di acido borico in acque ipertermali incontrate durante una trivellazione profonda, nella zona Flegrea (Fusaro).* Boll. Soc. Nat., vol. LXII. Napoli, 1953.

Carta topografica del tratto compreso tra Lucrino e Baia (Scala 1 : 12.500).

La parete tufacea delle Stufe di Nerone, vista da Lucrino.

Punta dell'Epitaffio con i ruderi del Palazzo di Giulio Cesare, vista da Baia. La discordanza nel tufo giallo è visibile in corrispondenza della grotta maggiore.

Punta dell' Epitaffio con i ruderi del Palazzo di Giulio Cesare, vista dalla strada costiera. La discordanza nel tufo giallo si trova in basso, in corrispondenza della fascia più chiara. Sullo sfondo il Castello di Baia.

Parete tufacea alle spalle della Punta dell'Epitaffio, verso Lucrino — M. Nuovo. La discordanza nel tufo giallo è visibile sulla destra, in corrispondenza della scalinata. Le pozzolane del III periodo compaiono in alto, al disopra del solco.

Parete alle spalle della Punta dell'Epitaffio, verso Baia. In basso, il tufo giallo; in alto, dopo il solco, le pozzolane del III periodo.

Fig. 1. — I due delta lacustri del Lucrino, visti dallo Scalandrone.

Fig. 2. — Parete di tufo giallo con i ruderi romani, nella cupa in corrispondenza dello Scalandrone.

Fig. 1. — Strati regolari di pomici costituenti la parete sita ad ovest della Sorgente di Pollio.

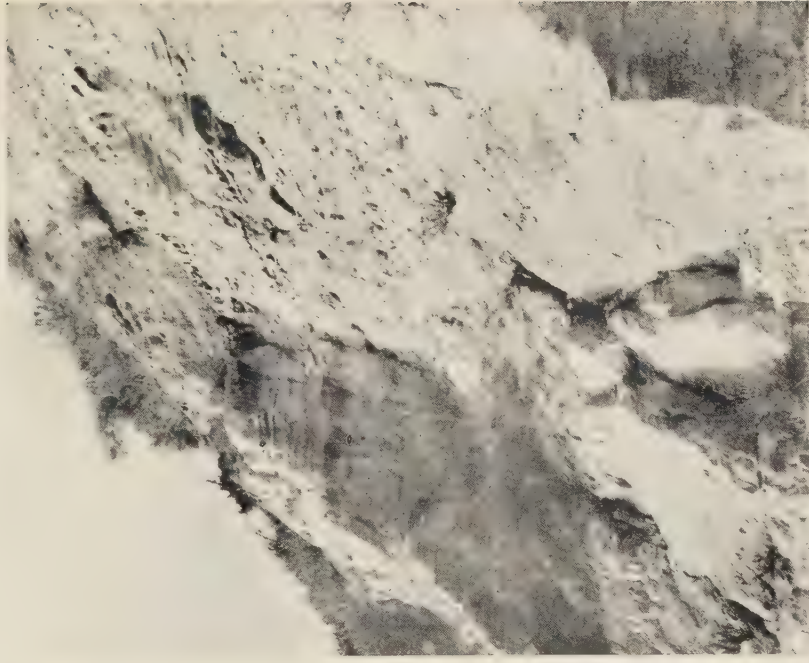



Fig. 2. — Serie stratigrafica affiorante alla parte alta dello Scalandrone.

Fig. 1. — Parete sotto Villa Iannon. Contatto tra il tufo giallo alterato (fino alla volta della grotta) e le pozzolane del III periodo.

Fig. 2. — Parete sotto Villa Iannon. In basso, il tufo giallo alterato con le pomici rosa. In alto, le pozzolane del III periodo.

Generalizzazioni del teorema di Castigliano

Nota del dr. ing. **Renato Sparacio**
presentata dal socio corrispondente **V. Franciosi**

(Adunanza del dì 16 novembre 1957)

Sunto. — Si generalizza il teorema di Castigliano per ricavare l'espressione dello spostamento di un punto in una struttura elastica soggetta a forze e distorsioni, ed il valore di una generica caratteristica della sollecitazione in una struttura elastica soggetta a sole distorsioni. Si riporta un'applicazione numerica.

1. — Si consideri una struttura ad elasticità lineare, soggetta ad un sistema F di forze e ad un sistema Δ di distorsioni definito attraverso le componenti $\varepsilon^*_x, \dots \gamma^*_{zy}$ (*)

L'espressione più generale dell'energia di deformazione elastica

$$L = \frac{1}{2} \int_v (\sigma_x \varepsilon_x + \dots\dots + \tau_{yz} \gamma_{yz})\, d\,v \tag{1}$$

tenendo conto delle espressioni delle σ e delle ε (**)

$$\sigma = \sigma_F + \sigma$$
$$\varepsilon = \varepsilon_F + \overline{\varepsilon}$$

può scriversi:

$$L = \frac{1}{2} \int_v (\sigma^{Fx} \varepsilon_{Fx} + \dots\dots + \tau_{Fzy} \gamma_{Fzy})\, dv + \frac{1}{2} \int_v (\overline{\sigma}_x \overline{\varepsilon}_x + \dots \overline{\tau}_{zy} \overline{\gamma}_{zy})\, dv = L_F + \overline{L} \tag{2}$$

(*) Secondo la convenzione adottata per il segno delle componenti ε^* della deformazione di distorsione si definisce positiva la generica componente di deformazione in un punto quando per essa compie lavoro positivo la forza elementare corrispondente all'analoga componente di tensione supposta agente sulla superficie che si ottiene asportando l'elemento di volume costituente l'intorno del punto considerato. Ne consegue, per le ε^* e γ^*, un segno opposto a quello che competerebbe loro se si considerassero componenti di una deformazione elastica.

(**) Si indicano con $\sigma_{Fx}, \dots, \tau_{Fyz}$ le sei componenti di tensione connesse a sistema di forze esterne e con $\sigma_x, \dots, \tau_{yz}$ quelle costituenti lo stato di coazione originato dalle distorsioni. Saranno, analogamente, $\varepsilon_{Fx}, \dots, \gamma_{F,zy}$ e $\varepsilon_x, \dots, \gamma_{zy}$ le componenti della deformazione elastica dovuta alle forze esterne, rispettivamente, allo stato di coazione.

essendo nulli ambedue i termini mutui (*)

$$\int_v (\sigma_{Fx} \bar{\varepsilon}_x + \ldots + \tau_{Fzy} \bar{\gamma}_{Fzy})\, dv = \int_v (\bar{\sigma}_x \varepsilon_{Fx} + \ldots \bar{\tau}_{zy} \gamma_{Fzy})\, d v = 0$$

(*) Dato un sistema 1 di forze F_1 e distorsioni ε^*_1 e un sistema 2 di forze F_2 e distorsioni ε^*_2 il lavoro mutuo generalizzato, cioè il lavoro che le forze del sistema 1 compiono per effetto delle deformazioni del sistema 2, più il lavoro che le sollecitazioni unitarie del sistema 1 compiono per effetto delle distorsioni ε^*_2 vale:

$$L_{12} = \Sigma\, F_1\, \eta_2 + \int_v (\sigma_{1x}\, \varepsilon^*_{2x} + \ldots + \tau_{1zy}\, \gamma^*_{2zy})\, dv$$

Tale lavoro, applicando il principio dei lavori virtuali ai sistemi 1 e 2, assumendo come sistema di forze quello agente sul sistema 1 e come sistema di spostamenti quelli del sistema 2, risulta uguale al lavoro interno

$$\int (\sigma_{1x}\, \varepsilon_{2x} + \ldots + \tau_{1zy}\, \gamma_{2zy})\, d v \qquad \text{(energia elastica mutua)}$$

Analogamente sarà:

$$L_{21} = \Sigma_{F_2}\, \eta_1 + \int_v (\sigma_{2x}\, \varepsilon^*_{1x} + \ldots + \tau_{2,zy}\, \gamma^*_{1,zy})\, dv = \int_v (\sigma_{2x}\, \varepsilon_{1x} + \ldots + \tau_{2,zy}\, \gamma_{1,zy})\, dv$$

e poichè per il teorema di Betti generalizzato è

$$L_{12} = L_{21}$$

dalle precedenti si ricava

$$\int_v (\sigma_{1x}\, \varepsilon_{2x} + \ldots + \tau_{1zy}\, \gamma_{2\,zy})\, dv = \int_v (\sigma_{2x}\, \varepsilon_{1x} + \ldots + \tau_{2,zy}\, \gamma_{1,zy})\, dv$$

potendosi di qui affermare che tra due sistemi di forze e distorsioni l'uguaglianza dei lavori mutui generalizzati si risolve nell'eguaglianza delle energie elastiche mutue. Si applichi ora il principio dei lavori virtuali ad un sistema di distorsioni ε^* caratterizzato dalle componenti speciali di tensione $\bar{\sigma}_y, \ldots, \bar{\tau}_{zy}$; si esprimano le condizioni di equilibrio di un tale sistema adottando come deformazioni virtuali quelle $\varepsilon_{Fx}, \ldots, \gamma_{F,zy}$ relative ad un sistema costituito da sole forze F.

Si ha così:

$$0 = \int_v (\bar{\sigma}_x\, \varepsilon_{Fx} + \ldots + \bar{\tau}_{zy}\, \gamma_{Fzy})\, dv$$

da cui, per l'eguaglianza tra le energie elastiche mutue si deduce

$$(5) \qquad \int_v (\bar{\sigma}_x\, \varepsilon_{Fx} + \ldots + \bar{\tau}_{zy}\, \gamma_{Fzy})\, dv = \int_v (\sigma_{Fx}\, \bar{\varepsilon}_x + \ldots + \tau_{Fzy}\, \bar{\gamma}_{zy})\, dv = 0$$

cioè, come volevasi dimostrare, l'annullarsi delle energie elastiche mutue relative ad un sistema di forze ed un sistema di distorsioni.

Nella (2) l'integrale

$$\frac{1}{2}\int_v \sigma_{Fx}\,\varepsilon_{Fx} + \ldots + \tau_{Fzy}\,\gamma_{Fzy})\,dv = L_F$$

rappresenta l'energia elastica di deformazione connessa con le forze esterne, e restituita dal corpo elastico al cessare dell'azione deformante delle forze. L'integrale

$$\frac{1}{2}\int_v (\bar{\sigma}_x\,\bar{\varepsilon}_x + \ldots + \bar{\tau}_{zy}\,\bar{\gamma}_{zy})\,dv = \bar{L}$$

rappresenta un'energia di deformazione legata allo stato di coazione conseguente alla distorsione, che non può essere restituita o « liberata » dal corpo se non facendo scomparire la causa distorcente o rendendo la struttura, mediante opportuni tagli, libera di deformarsi sotto l'azione distorcente senza dar luogo a stato di coazione; la $\bar{L}$ prende nome di *energia vincolata.*

Oltre alla energia elastica di deformazione $L^F + \bar{L}$, si consideri anche l'espressione

$$(3) \qquad -\int_v (\sigma_x\,\varepsilon_x^* + \ldots + \tau_{zy}\,\gamma_{zy}^*)\,dv = L^*$$

avente le dimensioni di un'energia: questo termine corrisponde al lavoro che sarebbe compiuto dalle tensioni $\sigma_x, \ldots, \tau_{zy}$ se esse fossero già esistenti all'inizio del processo di distorsione, lavoro che sarebbe possibile rendere nullo solo facendo agire dapprima la causa distorcente sulla struttura indeformata e libera di seguire la distorsione impressa senza dar luogo a stati di coazione, e fare intervenire solo dopo tale deformazione le sollecitazioni $\sigma_{Fx}, \ldots, \tau_{Fzy}$ (dovute alle forze esterne) e $\bar{\sigma}_x, \ldots, \bar{\tau}_{zy}$ (con il compito di riportare la struttura al rispetto della congruenza).

Si definisce « *energia fittizia di deformazione* » L_f, la somma dei lavori (1) e (3)

$$(4) \qquad \begin{aligned} L_f = L_F + \bar{L} + L^* = \frac{1}{2}\int_v (\sigma_{Fx}\,\varepsilon_{Fx} + \ldots + \tau_{Fzy}\,\gamma_{Fzy})\,dv\, + \\ + \frac{1}{2}\int_v (\bar{\sigma}_x\,\bar{\varepsilon}_x + \ldots + \bar{\tau}_{zy}\,\bar{\gamma}_{zy})\,dv - \int_v (\sigma_x\,\varepsilon^*_x + \ldots + \tau_{zy}\,\gamma^*_{zy})\,dv \end{aligned}$$

2. — Nel sistema considerato di forze F e distorsioni $\varepsilon_x^*, \ldots, \gamma_{zy}^*$ si suppone ora di incrementare una forza esterna F_i della quantità dF_i. L'energia elastica di deformazione L si incrementa di

$$(6) \qquad dL = \frac{\partial L}{\partial F_i}\,dF_i = \frac{\partial}{\partial F_i}(L_F + \bar{L})\,d\,F_i = \frac{\partial L_F}{\partial F_i}\,d\,F_i$$

essendo $\dfrac{\partial \bar{L}}{\partial F_i} = 0$ poichè l'energia vincolata non è funzione delle forze.

Avendo supposto il solido costituito da materiale ad elasticità lineare, L_F è una espressione quadratica delle F, e la derivata $\frac{\partial L_F}{\partial F_i}$ sarà perciò una espressione lineare delle F.

L'incremento dell'energia elastica dL può scomporsi in due parti, la $d''L$ dovuta al lavoro compiuto dalle $d\,\sigma_F$ connesse con la dF_i per effetto delle $d\varepsilon_F$ connesse con la stessa dF_i

$$d''L = \frac{1}{2}\int_v (d\,\sigma_F\; d\varepsilon_F + \ldots + d\,\tau_{F,zy}\; d\,\gamma_{F,zy})\,dv$$

e la parte $d'L$ dovuta al fatto che la $d\,F_i$ agisce in presenza delle F e delle ε^*. La $d'L$ coincide con il lavoro mutuo generalizzato compiuto dal sistema F ed ε^* per effetto della deformazione conseguente all'azione di dF_i, uguale, per il teorema di Betti generalizzato, al lavoro compiuto da dF_i per effetto delle deformazioni conseguenti alle F ed alle ε^* e cioè

$$(7) \qquad d'L = dF_i\,\eta_i + \int_v (d\sigma_x\,\varepsilon^*_x + \ldots + d\tau_{zy}\,\gamma^*_{zy})\,dv$$

dove η_i è la componente dello spostamento del punto di applicazione di F_i nella direzione di quest'ultima, dovuto alle F e ad ε^*, e $d\sigma = \frac{d\sigma}{\partial F_i}\,dF_i$ rappresenta la componente di tensione connessa con la dF_i.

L'integrale che compare al secondo membro della (7) tenendo presente la (3) non è altro che il differenziale cambiato di segno del lavoro perduto L^*

$$(8) \qquad \int_v (d\,\sigma_x\,\varepsilon^*_x + \ldots + d\,\tau_{zy}\,\gamma^*_{zy})\,dv = -\frac{\partial L^*}{\partial F_i}\,d\,F$$

Dalle (6), (7) e (8), trascurando $d''L$ in rapporto a $d'L$ si trae:

$$\frac{\partial L}{\partial F_i} = \eta_i - \frac{\partial L^*}{\partial F_i}$$

e cioè

$$(9) \qquad \eta_i = \frac{\partial\,(L + L^*)}{\partial F_i}$$

La (9) è l'espressione del « Teorema di CASTIGLIANO generalizzato » che può enunciarsi così:

« *In una struttura elastica, soggetta a forze e distorsioni, sotto le stesse ipotesi che condizionano il principio di sovrapposizione degli effetti, la componente dello spostamento del punto di applicazione di una forza secondo la retta di azione di quest'ultima, coincide con la derivata, rispetto alla forza stessa, dell'energia di deformazione fittizia* L_f ».

Per travi, e in presenza di distorsioni di VOLTERRA, è (*)

$$(10) \qquad L_f = \int_l \frac{N^2\,ds}{2\,EA} + \int_l \frac{M^2 ds}{2\,EJ} + \chi \int_l \frac{T^2\,ds}{2\,GA} + \Sigma_j \frac{c_j R_j^2}{2} -$$

$$- \int_l N\,\lambda\,ds - \int_l M\mu\,ds - \int_l T\,\vartheta\,ds - \Sigma_j\,R_j\,\Delta a_j$$

e la (9) si scrive perciò

$$\eta_i = \int_l \frac{N}{EA}\,\frac{\partial N}{\partial F_i}\,ds + \int_l \frac{M}{EJ}\,\frac{\partial M}{\partial F_i}\,ds + \chi \int_l \frac{T}{GA}\,\frac{\partial T}{\partial F_i}\,ds + \Sigma_j\,c_j\,R_j\,\frac{\partial R_j}{\partial F_i} -$$

$$- \int_l \lambda\,\frac{\partial N}{\partial F_i}\,ds - \int_l \mu\,\frac{\partial M}{\partial F_i}\,ds - \int_l \vartheta\,\frac{\partial T}{\partial F_i}\,ds - \Sigma_j\,\Delta a_j\,\frac{\partial R_j}{\partial F_i}$$

espressione analoga a quella che si ricava applicando il principio dei lavori virtuali per la determinazione di η_i.

3. — Si consideri ora un sistema soggetto a sole distorsioni $\varepsilon_x^*, \ldots, \gamma_{zy}^*$ nell'ipotesi che tra le distorsioni ne esista almeno una concentrata D_i, e che questa subisca un incremento dD_i, l'energia elastica di deformazione $\overline{L}$ subisce un incremento

$$(11) \qquad d\overline{L} = \frac{\partial \overline{L}}{\partial D_i}\,dD_i$$

L'incremento $d\overline{L}$ può scomporsi in $d''\overline{L}$ dovuto al lavoro delle $d\overline{\sigma}$ connesse con dD_i per effetto delle $d\varepsilon$ connesse con la stessa dD_i, e $d'\overline{L}$, dovuto al fatto che dD_i agisce in presenza delle $\overline{\sigma}$. Tale lavoro mutuo generalizzato vale

$$(12) \qquad d'\overline{L} = C_i\,dD_i$$

(*) Le funzioni μ, λ, θ che compaiono nella (10) definiscono le distorsioni distribuite di rotazione relativa $d\varphi$, di spostamento assiale relativo du, e di scorrimento relativo dv di due sezioni rette, ubicate alle ascisse s e $s + ds$; esse sono espresse da

$$d\varphi = \mu\,(s)\,ds\,; \qquad du = \lambda\,(s)\,ds\,; \qquad dv = \theta\,(s)\,ds$$

R, rappresenta la generica reazione del vincolo esterno, Δa, il corrispondente cedimento (anelastico), e c la costante elastica, che definisce la cedevolezza del vincolo elastico.

dove C_i è la caratteristica della sollecitazione corrispondente alla distorsione D_i.

Dalle (11) tenendo conto della (12) e trascurando $d''\overline{L}$ in rapporto a $d'\overline{L}$ si ricava

$$\frac{\partial \overline{L}}{\partial D_i} = C_i \tag{13}$$

Si può quindi enunciare un teorema analogo a quello di Castigliano: « *In una struttura elastica soggetta a distorsioni la derivata dell'energia di deformazione rispetto ad una distorsione concentrata coincide con il valore della caratteristica corrispondente alla distorsione che si verifica nella sezione ove è applicata la distorsione stessa* ».

Per travi e distorsioni di Volterra si ha

$$C_i = \int_l \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial D_i} ds + \int_l \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial D_i} ds + \chi \int_l \frac{T}{GA} \frac{\partial T}{\partial D_i} ds + \Sigma\, c_j\, R_j \frac{\partial R_j}{\partial D_i}$$

4. — Si svolge qui di seguito un'applicazione numerica.

Sia data una piastra circolare. incastrata al contorno, di raggio R e spessore s, caricata da un carico uniformemente distribuito p, e soggetta nella zona centrale definita da $0 \leq r \leq R/2$, ad una variazione termica di andamento lineare lungo lo spessore, che si annulla in corrispondenza della superficie media e i cui valori estremi differiscano algebricamente di $\overline{\Delta t}$.

Detto z l'asse normale alla piastra, con l'origine 0 nel centro della superficie media e positivo verso il basso, si voglia determinare per mezzo del teorema di Castigliano generalizzato, l'abbassamento del punto centrale.

Applicando una forza P verticale diretta verso il basso in 0, risulta

$$L_f = \frac{1}{2} \int_v (\sigma_r\, \varepsilon_r + \sigma_\vartheta\, \varepsilon_\vartheta)\, dv - \int_v (\sigma_r\, \varepsilon_r^* + \sigma_\vartheta\, \varepsilon^*_\vartheta)\, dv \tag{a}$$

Sostituendo nella (a) le espressioni

$$\sigma_r = \frac{3}{4} \frac{p}{s^3} \left[(1+\nu)\, R^2 - (3+\nu)\, r^2\right] z + \frac{3}{\pi} \frac{P}{s^3} \left|(1+\nu) \log \frac{R}{r} - 1\right| z$$

$$\sigma_\vartheta = \frac{3}{4} \frac{p}{s^3} \left[(1+\nu)\, R^2 - (1+3\nu)\, r^2\right] z + \frac{3}{\pi} \frac{P}{s^3} \left[(1+\nu) \log \frac{R}{r} - \nu\right] z$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \frac{3}{4} \frac{p}{s^3} (1-\nu^2)\, (R^2 - 3\, r^2)\, z + \frac{1}{E} \frac{3}{\pi} \frac{P}{s^3} \left| (\log \frac{R}{r} - 1)\, (1-\nu^2) \right| z$$

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{1}{E}\,\frac{3}{4}\,\frac{p}{s^3}\,(1-\nu^2)\,(R^2-r^2)\,z + \frac{1}{E}\,\frac{3}{\pi}\,\frac{P}{s^3}\left[\log\frac{R}{r}\,(1-\nu^2)\right] z$$

$$\varepsilon^*_r = \varepsilon^*_\vartheta = -\frac{\alpha\Delta t}{s}\,z$$

(la variazione termica si suppone positiva sulla superficie inferiore) e derivando rapporto a P si ottiene (avendo posto $dv = dr \cdot rd\vartheta \cdot dz$):

$$\eta = \frac{\partial L_f}{\partial P} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial P}\int_0^R \left\{\frac{3}{4}\,\frac{p}{s^3}\left|(1+\nu)R^2 - (3+\nu)r^2\right| + \frac{3}{\pi}\,\frac{P}{s^3}\left|(1+\nu)\log\frac{R}{r} - 1\right|\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{E}\,\frac{3}{4}\,\frac{p}{s^3}\,(1-\nu^2)(R^2-3r^2) + \frac{1}{E}\,\frac{3}{\pi}\,\frac{P}{s^3}\left|(\log\frac{R}{r} - 1)\,(1-\nu^2)\right|\right\} rdr\int_{-s/2}^{+s/2} z^2\,dz\int_0^{2\pi} d\vartheta +$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial P}\int_0^R \left\{\frac{3}{4}\,\frac{p}{s^3}\left|(1+\nu)\,R^2 - (1+3\nu)\,r^2\right| + \frac{3}{\pi}\,\frac{P}{s^3}\left|(1+\nu)\log\frac{R}{r} - \nu\right|\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{E}\,\frac{3}{4}\,\frac{p}{s^3}\,(1-\nu^2)\,(R^2-r^2) + \frac{1}{E}\,\frac{3}{\pi}\,\frac{P}{s^3}\left[\log\frac{R}{r}(1-\nu^2)\right]\right\} r\,d\,r\int_{-s/2}^{+s/2} z^2\,dz\int_0^{2\pi} d\vartheta +$$

$$+\frac{d}{\partial P}\int_0^{R/2}\left\{\frac{3}{4}\,\frac{p}{s^3}\left[(1+\nu)\,R^2 - (3+\nu)\,r^2\right] + \frac{3}{\pi}\,\frac{P}{s^3}\left[(1+\nu)\log\frac{R}{r} - 1\right] + \right.$$

$$+\frac{3}{4}\,\frac{p}{s^3}\left[(1+\nu)\,R^2 - (1+3\nu)\,r^2\right] +$$

$$\left. + \frac{3}{\pi}\,\frac{P}{s^3}\left[(1+\nu)\log\frac{R}{r} - \nu\right]\right\}\frac{\alpha\overline{\Delta t}}{s}\,r\,d\,r\int_{s/2}^{+s/2} z^2\,d\,z\int_0^{2\pi} d\vartheta =$$

$$(b) \qquad = \frac{3}{16}\,\frac{p}{E}\,\frac{R^4}{s^3}\,(1-\nu^2) + \frac{3}{4}\,\frac{PR^2}{\pi E s^3}\,(1-\nu^2) + \frac{\alpha\,\overline{\Delta t}}{s}\,\frac{R^2}{8}\log 2\,(1+\nu).$$

Nella (b) si distingue l'abbassamento provocato dal carico ripartito, quello dovuto alla variazione termica e quello dovuto alla forza P che occorre annullare.

Con la condizione $\frac{\partial L_f}{\partial P} = 0$ si potrebbe determinare la reazione di un appoggio fisso nel centro della piastra. Risulta

$$P = \frac{p}{4}\,\pi R^2 + \frac{\pi}{6}\log 2\,\frac{E\,s^2}{1-\nu}\cdot\alpha\cdot\overline{\Delta t}$$

Quanto sopra è nello spirito di un' ovvia generalizzazione del teorema di Menabrea che può farsi derivare dal teorema di Castigliano generalizzato, come il teorema di Menabrea deriva dal teorema di Castigliano classico.

Napoli, Istituto di Scienza delle Costruzioni, Giugno 1957.

GIUSEPPE DE LORENZO

Commemorazione letta dal socio **Geremia D' Erasmo**

nell' adunanza plenaria del dì 15 dicembre 1957

Conobbi Giuseppe De Lorenzo nel 1907, nell' Istituto geologico di Napoli, di cui eravamo stati entrambi allievi sotto l' amorosa guida di Francesco Bassani. Egli veniva allora da Catania, chiamato per l' art. 69 della legge Casati a coprire, in qualità di ordinario, la cattedra di Geografia fisica istituita per lui. Era, quindi, ai primi anni della sua brillantissima carriera universitaria, che doveva poi svoigersi tutta nel nostro Ateneo; mentre io, scolaro spinto da naturale inclinazione verso gli studi naturalistici ed avido di apprendere, seguivo con trasporto quelle lezioni così dense di varia e profonda dottrina, eppure così chiare, ordinate, limpide, spazianti in vastissimi orizzonti e tali da invogliare in sommo grado l' uditorio ad una più ampia conoscenza delle scienze della terra.

Poi si strinsero maggiormente i miei contatti con Lui, allorchè dopo la morte del Bassani — di cui, subito dopo la mia laurea, conseguita nell' agosto 1908, ero ufficialmente assistente, in realtà figlio spirituale — De Lorenzo ebbe l' incarico della Geologia, che tenne fino al 1922, passando poi definitivamente e stabilmente a quella cattedra nel 1925. Fui, infatti, suo aiuto per molti anni, non solo nell' Istituto di Geologia, ma anche in quello di Geografia fisica, ed ebbi l' ambito privilegio di collaborare con Lui in parecchi studi paleontologici riguardanti l' illustrazione dei pachidermi fossili delle nostre province meridionali, accolti per la stampa negli Atti e nel Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli.

I vecchi legami di gratitudine e di affetto si fecero ancor più intimi e profondi allorchè occupai, nel 1931, per concorso, la nuova cattedra di Paleontologia, rimanendo, come collega, a fianco del Maestro amatissimo nel medesimo Istituto in cui si era svolta tutta la mia carriera universitaria, e divenendone, dieci anni più tardi — per sua stessa designazione, sanzionata dall' unanime voto della nostra Facoltà di Scienze — l' indegno successore nella Cattedra di Geologia, al momento del Suo collocamento a riposo per limiti di età. Frutto di questi rapporti spirituali divenuti più stretti attraverso una vita intera, furono tra l' altro alcune pubblicazioni in collaborazione destinate ai giovani, quali la nuova edizione della *Geologia dell' Italia meridionale* (1937) e gli *Elementi di Geografia fisica* (1947).

Sono stati, dunque, esattamente cinquanta anni di vita comune, di legami spirituali, di amicizia leale e profonda e sempre più intima, permeata,

Giuseppe De Lorenzo

in me, da antica gratitudine, da devozione infinita, da ammirazione grandissima, da affetto sempre crescente.

E' ben naturale, quindi, che io voglia rivendicare a me l'onore di ricordare la vita e l'opera del mio grande Maestro. Non è solo un preciso dovere, ma anche un prepotente bisogno dell'animo mio.

Spigolando fra i tanti ricordi più cari al mio cuore di questo cinquantennio, e attingendo a qualche dato autobiografico da Lui fornito occasionalmente in articoli e saggi, antichi e recenti, mi proverò a tracciare — soprattutto per coloro che non ebbero la ventura di essergli vicini per lungo tempo — un profilo dell'uomo, dello scienziato, dell'artista, del pensatore, facendo rilevare la poliedricità della sua nobilissima figura. Gli altri, che meglio lo conobbero e perciò l'apprezzarono, l'ammirarono e l'amarono avvertiranno più stridente il contrasto fra la grandezza spirituale del Maestro e la povertà di idee e di linguaggio dell'odierno commemorante, ultimo fra i suoi allievi.

*
* *

A tutti, forse, sembrerà superfluo che io rievochi oggi, con particolarità di dettagli, il nostro grande Scomparso in questa Accademia, che Egli considerò sempre come l'*alma mater*, che gli aveva dato il primo vital nutrimento; in cui espose e diede alle stampe tanta parte delle sue ricerche negli svariati campi, prima della geologia e quindi della filosofia, della letteratura e dell'arte; a cui dedicò, quale attestato della sua filiale gratitudine, le più amorevoli e devote cure nei lavori di prima sistemazione dell'attuale sede (1927), in quelli di ampliamento ed arredamento (1931 - 35) e nella più recente opera di ricostruzione, dopo le distruzioni belliche del settembre 1943.

Non solo Egli vive, infatti, nel nostro ricordo e nella serie delle nostre pubblicazioni, ma in questa stessa aula non si è ancora del tutto spenta l'eco delle parole, che Egli, in qualità di Presidente generale, pronunziò il 30 Gennaio 1950 nella prima tornata plenaria della ricostituita Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli. Mi piace riportare integralmente, dai miei appunti inediti di quel processo verbale, quanto Egli ebbe a dire, in quella circostanza sul valore e sull'importanza delle Accademie: « ... scopo precipuo, anzi forse unico, delle Accademie è quello di permettere ai loro soci di esporre e di pubblicare i risultati delle loro ricerche scientifiche, che altrimenti, per la loro specificità, non potrebbero essere facilmente divulgati, e di aiutare egualmente i giovani studiosi nei loro primi passi sul cammino dell'incremento delle scienze. E non hanno, quindi, ragione i profani di considerare le Accademie quali raccolte di noiosi pedanti, che cianciano e scrivono di cose inutili alla vita ed al mondo. Che anzi le Accademie possono vantarsi di una tradizione nobiliare più che bi-

millenaria nella storia della cultura e della civiltà: a cominciare dalla prima Accademia di Platone, che ce ne ha trasmesso il nome e dalle sue contemporanee, del quarto secolo avanti Cristo. quali il Peripato del Liceo di Aristotile, il Giardino di Epicuro e la Stoà di Zenone; passando per i chiostri cristiani medioevali, che ne raccolsero il retaggio, e primo tra essi quello di Monte Cassino, fondato proprio in quell'anno 529 dopo Cristo, in cui Giustiniano aveva sciolto le Accademie di Atene; e procedendo quindi per le rinate Accademie del Rinascimento italiano, quali la Pontaniana di Napoli del 1443 ed i Lincei di Roma del 1603; e quelle che, a loro imitazione, le seguirono all'estero, come l'Académie française a Parigi, del 1635, la Royal Society di Londra, del 1645, l'Akademie der Wissenschaften di Berlino, del 1700; e tutte le altre, che si sono poi fino ad oggi diffuse per tutta la terra, fino alla famosa Dimora della Pace, o Santinikêtan, di Rabindranath Tagore; dove anche accademici italiani, nostri colleghi, Carlo Formichi e Giuseppe Tucci, andarono ad attingere virtù e conoscenza a quelle fonti di antichissima sapienza, fluenti per le valli dell'Indo e del Gange ».

*
* *

Nato nell'alpestre paese di Lagonegro, ai piedi del Monte Sirino — rivestito di selve di castagni, di querce, di faggi e di aceri, e per parecchi mesi dell'anno ammantato di neve — De Lorenzo rivelò ben presto la naturale inclinazione per le Scienze naturali, che crebbe e si sviluppò con i primi viaggi oltre la nativa Lucania, e con gli studi liceali ed universitari, rispettivamente compiuti a Salerno e a Napoli. La conoscenza — fatta mentre era ancora studente liceale - dei geologi Baldacci e Mezzena, che rilevavano la carta geologica della Basilicata, e del prof. Bassani, che da due anni dirigeva l'Istituto geologico di Napoli, valse ad orientarlo verso la geologia; mentre la lettura delle epopee omeriche ed indiane accendeva in quella giovane mente una diversa, ma non minore sete di conoscenza, diretta verso l'arte, la letteratura e la filosofia. Questa duplice tendenza, scientifica e letteraria, che si era manifestata fin dagli anni giovanili, si sviluppò ed approfondì sempre più in De Lorenzo, trovando il terreno più adatto nella vita culturale e spirituale, che sul finire dell'Ottocento era fervidissima in Italia ed aveva a Napoli focolai numerosi ed ardenti. Uno di questi era la casa di Benedetto Croce, che in quel tempo accoglieva una schiera di uomini illustri di ogni parte del mondo; un altro la casa di Giustino Fortunato, dove convenivano, come intorno al maggior rappresentante della nativa Lucania, numerosi corregionali, fra cui Vittorio Spinazzola, Francesco Saverio Nitti, Andrea Petroni ecc.; altri, ancora, erano il caffè « Gambrinus » e il « Calzona », che riunivano abitualmente i maggiori rappresentanti delle lettere e delle arti di Napoli: da Salvatore Di

Giacomo a Ferdinando Russo, da Roberto Bracco a Federico Verdinois, da Napoleone Colaianni a Vincenzo Gemito, da Eduardo Dalbono ad Antonio Curri, e così via, fino alle irregolari apparizioni di Francesco Paolo Michetti, Gabriele D'Annunzio, Cesare Pascarella, Adolfo De Bosis e cento altri rappresentanti di quel mondo d'arte e di poesia, di letteratura e di politica.

In tutti questi ambienti di alta e varia spiritualità si svolsero la giovinezza ed i primi anni della maturità di De Lorenzo, determinando l'indirizzo della restante sua vita, allargandone orizzonti e tendenze, ampliando sempre più i già vasti campi dei suoi scritti, rendendone poliedrica la personalità, nella quale si fondono mirabilmente — come in un bronzo di purissima lega — lo scienziato, il pensatore, l'artista.

Geologo di professione, educato alla scuola di Francesco Bassani, che, come si è detto, da pochi anni aveva ottenuto, per concorso, la cattedra di Napoli, De Lorenzo fu condiscepolo ed amico fraterno di Raffaele Vittorio Matteucci, Pasquale Aldinio, Edoardo Flores, Carlo Patroni, Agostino Galdieri, Maria Bakunin, Federico Raffaele, Giuseppe Mazzarelli, Achille Russo, ed ebbe fra i suoi maestri nell'Ateneo Napoletano Achille Costa, Federico Delpino, Giustiniano Nicolucci, Agostino Oglialoro, Giovanni Paladino, Luigi Palmieri, Eugenio Scacchi, Salvatore Trinchese, Emilio Villari.

Conseguita la laurea in Scienze naturali, col massimo dei voti e la lode, il 28 luglio 1894, ed ottenuto il diploma della Scuola di Magistero un anno più tardi, ebbe la libera docenza, per titoli, in geologia con decreto del 9 giugno 1897; e nel 1902 venne contemporaneamente dichiarato eleggibile nel concorso per la cattedra di Geologia dell'Università di Catania, in quello per la Geografia fisica nell'Università di Padova e nel concorso al posto di Direttore dell'Osservatorio Vesuviano. E nel medesimo anno ebbe l'incarico dell'insegnamento di Geografia fisica nell'Ateneo napoletano, nel quale aveva anche occupato il posto di assistente presso l'Istituto di Mineralogia fin dal 1898. Nel 1905, riuscito primo nel nuovo concorso indetto per la cattedra di Geologia di Catania, fu nominato in quella Università professore straordinario di geologia ed incaricato di geografia fisica. Due anni più tardi, in sèguito a voto della Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli, approvato all'unanimità dal Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione, essendo venuto « per opere, per iscoperte e per insegnamenti dati, in meritata fama di singolare perizia nelle materie da professare », fu, in base all'art. 69 della legge Casati, nominato professore ordinario di Geografia fisica nell'Università di Napoli. In questa, dopo la morte del prof. Porena, tenne l'incarico della Geografia nella Facoltà di Lettere durante gli anni 1910 - 1913; e quindi l'incarico della Geologia, dopo la morte del Prof. Bassani, dal 1916 al 1922. Finalmente dal Gennaio 1925, per voto della Facoltà, egli fu professore ordinario di Geologia ed incaricato di Geografia fisica. Nel nostro Ateneo si svolse tutta la sua ulteriore carriera fino

al 1941, quando dovette lasciare l'insegnamento per limiti di età, diventando, poi, professore emerito; ma anche dopo quella data la Facoltà di Scienze e l'Istituto Orientale se ne contesero la preziosa opera didattica; chè, per alcuni anni ancora, Egli tenne, per incarico, rispettivamente lezioni di geografia fisica e conferenze di Storia delle religioni e filosofie dell'estremo oriente.

Maestro insuperato di intere generazioni di allievi, conobbe come pochi la difficile arte dell'insegnamento, rendendo facili e piani gli argomenti più astrusi e complicati, attirando alle sue lezioni i giovani con l'elegante semplicità del linguaggio, con la ricchezza delle citazioni classiche, con l'efficacia dei confronti; avvincendoli con le grandi visioni della poesia e dell'arte, aprendo la loro mente ai problemi più ardui dello spirito, diventando, in una parola, per essi, Maestro di scienza, di sapienza, di vita. Non è pertanto da meravigliarsi se parecchi fra i suoi discepoli, sorretti e incoraggiati da Lui, giunsero a posti preminenti. Ed Egli era felice dei loro successi e ricordava, con visibile compiacimento, la carriera di molti.

Naturalista veramente completo, potè, con rara efficacia, trattare i più svariati argomenti di geografia fisica e di geologia — che, richiedendo chiara conoscenza di leggi e fenomeni fisici, chimici, mineralogici e biologici, dagli effetti complessi e variamente intrecciati, presentano spesso non poche difficoltà — e seppe non solo infondere nei suoi allievi l'amore per il mondo organico ed inorganico, ma altresì schiudere dinanzi alle loro menti gli orizzonti di una superiore visione, in cui il rigore della scienza si fonde mirabilmente con l'afflato della poesia, con la bellezza della letteratura, con la profondità della filosofia.

*
* *

Nel campo delle discipline della terra la sua produzione scientifica, iniziata nel 1892, rivelò subito, in quel giovane studente poco più che ventenne, un ingegno poderoso, « impaziente di slanciarsi nelle più ardue questioni ». Due brevi note, inserite nei Rendiconti dei Lincei di quell'anno, si riferiscono infatti a due sensazionali scoperte da Lui fatte nei monti più alti della Lucania: l'una riguardante l'esistenza di vaste plaghe di terreni triassici, che erano pressocchè ignoti nella regione, l'altra relativa alla presenza di insospettate morene glaciali nel gruppo del Monte Sirino presso Lagonegro. Altre osservazioni geologiche sui luoghi nativi formarono argomento di ulteriori pubblicazioni, coronate nel 1894 da un'ampia memoria su *Le montagne mesozoiche di Lagonegro*, in cui illustrò nei più minuti dettagli la costituzione stratigrafica e la struttura tettonica di quella pittoresca zona fino allora pressocchè sconosciuta alla scienza. Tali pubblicazioni non solo dimostrarono nel giovanissimo autore la stoffa di buon geologo, apprezzabile per acume di osservazioni, per genialità ed ampiezza

di vedute, per sicurezza di confronti, ma testimoniarono pure che egli era già pervenuto a concetti che segnavano un progresso deciso e ragguardevole della geologia italiana.

Negli anni immediatamente successivi De Lorenzo allargò notevolmente il suo campo di osservazione. Tutta l'Italia meridionale fu da Lui con amorosa assiduità percorsa e studiata. Tra i numerosi lavori, frutto di quegli studi, si potrebbero ricordare quelli, d'indole stratigrafica e paleontologica, riguardanti la penisola di Sorrento, la fauna della pietra leccese, i fossili del Trias medio e del Postpliocene della Basilicata, la geologia dei monti Picentini e della Calabria settentrionale, lo scoglio di Revigliano ecc.; quelli a carattere vulcanologico, riflettenti le lave effluite nel 1895 dal gran cono del Vesuvio e l'attività di questo vulcano nella seconda metà del sedicesimo secolo; gli studi pedologici sulla Basilicata e geologico-applicativi sul tronco ferroviario Casalbuono-Lagonegro; ma, senza fermarci su questi scritti minori — che hanno tuttavia sempre l'interesse di offrire nuovi e pregevoli contributi al progresso della conoscenza geologica nelle province meridionali — non possiamo non ricordare particolarmente la magistrale memoria, premiata dall'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli nel 1898, sopra le *Reliquie di grandi laghi pleistocenici nell'Italia meridionale*, in cui è dimostrata l'esistenza, precisata l'area, descritta la serie dei sedimenti e dei resti organici di parecchi grandi laghi (bacini dell'Agri, del Mèrcure, del Noce), che durante il Pleistocene ingemmavano il dorso selvoso dell'Italia meridionale, conferendogli un aspetto ben diverso da quello attuale e paragonabile piuttosto all'odierno paesaggio alpino o svizzero, ricco di boschi e di bacini lacustri, di ghiacciai e di acque correnti.

Ma ancor più degna di speciale menzione è l'importantissima monografia *Studi di geologia nell'Appennino meridionale*, che, pubblicata dall'Accademia di Napoli nel 1896, Gli valse — insieme con alcuni degli scritti minori, ai quali si è precedentemente accennato — il Premio Reale dei Lincei per l'anno 1898. La Commissione giudicatrice ebbe a definirla « sintesi poderosa delle conoscenze sulla geologia della penisola a sud del Garigliano, preparata con saggio ordinamento dei dati stratigrafici, litologici e paleontologici, ed appoggiata a confronti con regioni diverse e bene studiate », lodando la « temperanza rispettosa della discussione e la solidità delle ragioni e la più esatta rispondenza alle condizioni di fatto, che si riconosce nelle idee contrapposte dall'autore » quando vi si combattono idee altrui, che si sono fatte strada nella scienza, perchè sostenute da un'alta autorità. Tale è il caso delle idee espresse da Edoardo Suess — uno fra i maggiori geologi del secolo scorso — sull'origine per sprofondamento del golfo di Napoli: idee considerate erronee da De Lorenzo, che dimostra come il bacino eruttivo partenopeo rappresenti una conca sinclinale, percorsa, specialmente nelle sue parti più basse, da almeno due sistemi di

fratture, uno concentrico al gruppo eruttivo centrale e l'altro radiale e convergente verso questo stesso centro.

Le profonde conoscenze sulla geologia del Mezzogiorno, acquisite direttamente con le ripetute escursioni e col diligente studio delle opere dei precedenti osservatori, e le ulteriori ricerche di dettaglio, che veniva compiendo tanto in Basilicata che in Campania, lo misero in grado di dare alle stampe, pochi anni più tardi, un'altra chiara sintesi della *Geologia e geografia fisica dell'Italia meridionale*, che rappresenta, nelle sue due edizioni, del 1904 e del 1937, quanto di più nitido e preciso sia stato genialmente scolpito a grandi linee sulla geologia del nostro Mezzogiorno.

Questi due lavori hanno costituito e rappresentano ancor oggi, a più di mezzo secolo dalla loro pubblicazione, gl'insuperati modelli, che sono serviti e servono di premessa e di base per ogni successiva ricerca geologica. Gli ulteriori lavori di cesello, che in numero sempre crescente sono stati condotti da studiosi molteplici sulla geologia meridionale, non hanno infatti tolto nulla all'importanza fondamentale di quelle ricerche e di quelle sintesi, anche se qua e là sono stati rilevati nuovi dettagli o fatte nuove precisazioni o escogitate altre interpretazioni strutturali.

Ma la versatile competenza di De Lorenzo in tutti i settori della geologia e la sua permanenza nella sede più classica degli studi sul vulcanismo non potevano non attirarlo verso queste imponenti e misteriose manifestazioni dell'attività endogena del globo. Una importantissima serie di lavori, iniziata nel 1895 e proseguita nel ventennio successivo, ha per oggetto la storia del vulcanismo del bacino di Napoli, le principali manifestazioni effusive del Vesuvio (eruzioni del 1895 e del 1906) e dell'Etna *(Il neck subetneo di Motta S. Anastasia)*, l'origine, i materiali, i processi costruttivi e distruttivi dei principali centri eruttivi flegrei, accentrati in piccolo spazio come sulla superficie lunare, e la storia geologica del Vulture, che solitario accese i suoi fuochi sul versante adriatico della Lucania, ai confini con la Puglia.

Ciascuno di questi lavori, che sono condotti con acume di specialista, passione di ricercatore, onesta e serena valutazione delle precedenti ricerche altrui, non solo rappresenta un esauriente studio geologico dei singoli crateri esaminati, ma costituisce altresì un vero modello del metodo da seguire in una ricerca vulcanologica; ed è solo da lamentare il fatto che il Nostro, assorbito da altri studi che lo attiravano sempre più intensamente verso la letteratura e la filosofia, non abbia completato la collana di monografie sui Campi ed isole Flegree, con tanto successo iniziata e condotta per i crateri di Vivara, Astroni, Miseno, Nisida, Fossa Lupara, Monte Gauro. La memoria sul M. Vulture fu premiata al quinto concorso Molon della Società geologica italiana (1901) e alcune di quelle sulla regione flegrea furono preparate con la collaborazione dell'indimenticabile suo amico

Carlo Riva, perito tragicamente nel 1902 in una catastrofe alpina sulla Grigna, e del suo assistente giapponese Hidezô Simotomai Tanakadate.

In tali pubblicazioni vulcanologiche l' autore non si limita allo studio analitico dei prodotti e alla loro disposizione, che gli permettono di far rivivere, per dir così, innanzi agli occhi del lettore, tutta la serie di vicende che portarono alla formazione e alla trasformazione dei singoli apparati vulcanici, ma confronta tra loro i vari centri eruttivi per indagarne i rapporti morfologici, strutturali e genetici (*Paragone tra il Vesuvio e il Vulture, i vulcani di Napoli, Ancora del Vesuvio ai tempi di Strabone, Le basi dei vulcani Vulture ed Etna*, ecc.) e risale alle questioni più ardue, che investono le cause prime del vulcanismo (*Considerazioni sull'origine superficiale dei vulcani, Influenza dell' acqua atmosferica sull'attività del Vesuvio, La pioggia ed il Vesuvio*, ecc.) e i discussi rapporti con i terremoti (*Vulcani e terremoti*).

E' facile comprendere come tale specifica competenza nel campo vulcanologico, derivata dalle molteplici indagini analitiche sui più importanti centri eruttivi meridionali, gli abbia facilitato le ampie e precise sintesi, che ricostruiscono magistralmente tutta la storia dell' attività vulcanica quaternaria del nostro Mezzogiorno. E' notissima a tale riguardo, per la fondamentale importanza che ha avuto, per mezzo secolo, quale bussola da orientamento per tutte le ulteriori ricerche nella regione, la sua riassuntiva *History of volcanic action in the Phlegraean Fields* (1904), che, scritta per invito di Sir Archibald Geikie, che aveva accompagnato De Lorenzo nelle escursioni in quel territorio, e da lui presentata e discussa alla Geological Society di Londra, fruttò all' autore la nomina a socio straniero di quell' importante Sodalizio. Di quel lavoro egli diede, nello stesso anno 1904, una versione italiana, inserita nel Rendiconto dell'Accademia delle Scienze di Napoli. Ancora più note, perchè scritte a scopo volgarizzativo per il gran pubblico, sono le monografie sopra *Venosa e la regione del Vulture* (1906), *L' Etna* (due edizioni, 1907 e 1928), *I Campi Flegrei* (1909), *Il Vesuvio* (1931), che col corredo di numerose illustrazioni vennero inserite nella collezione « Italia artistica » dell' Istituto di arti grafiche di Bergamo. In esse l'autore, seguendo la tendenza che si era andata gradatamente sviluppando in lui fin dagli anni giovanili, addolcisce l' aridità della geologia, in mirabile fusione di concetti e di linguaggio, con la cultura storica, il gusto artistico, la visione poetica.

La produzione geologica di De Lorenzo, benchè affievolita col progredire dell' età matura — non solo per il peso naturale degli anni, che lo rendeva meno adatto a girar per monti e valli a rompere rocce e ricercare fossili, ma anche per la crescente passione verso gli studi letterari e filosofici, ai quali doveva ormai dedicare quasi tutta la restante sua attività — continuò ad arricchirsi di nuovi e non trascurabili frutti. Sono talvolta ricerche mineralogiche e geologiche sulla Lucania, che riprendono e com-

pletano vecchi argomenti precedentemente studiati o ne trattano altri nuovi (*Azzurrite e malachite dei dintorni di Lagonegro*, 1907; *Caverna con avanzi preistorici presso Lagonegro*, 1911; *Sull' età degli scisti cristallini della valle del Sinni*, 1912; *Il glaciale dei dintorni di Lagonegro*, in collaborazione con G. Dainelli, 1923; *Litantrace nel mesozoico di Lagonegro*, 1924); sono studi di geologia applicata (*Contributo alla ricerca delle norme edilizie per le regioni sismiche*, 1910; *Studio geografico fisico del lago artificiale di Muro Lucano*, in collaborazione con H. Simotomai, 1917); oppure scritti polemici ed occasionali, riguardanti determinate zone della Campania (*L'isola di Capri*, 1907; *Una monografia dei Campi Flegrei*, 1908; *Come cresce il Vesuvio*, 1909; *Il seppellimento di Ercolano*, 1909; *Sulla causa geologica della scomparsa dell' antica città di Paestum*, 1930; *Il cratere di Monte Nuovo disegnato da Francisco de Hollanda nel febbraio 1540*, 1942; *Il padre della Campania*, 1944 e 1949, ecc.); e, ancora, brevi profili geologici sulle province meridionali, scritti per l' Enciclopedia italiana (*Campi Flegrei*, 1932) o per il Touring Club Italiano (*Campania*, 1936; *Lucania*, 1937), lezioni ed articoli volgarizzativi (*Molluschi geologi*, 1936; *La costituzione geologica dei terreni meridionali*, 1953); sono, infine, appassionate commemorazioni di suoi maestri o colleghi o amici (*Matteucci*, 1909; *Bassani*, 1916; *Cermenati*, 1924; *Geikie*, 1924; *Zambonini*, 1934; *Spinazzola*, 1943; *Pilla*, 1949) o commosse rievocazioni di amatissimi collaboratori (*Riva*, 1902).

Un cenno a parte meritano gli studi di storia della scienza, tra i quali emergono, per larghezza di confronti ed importanza di risultati, quelli riguardanti *Leonardo da Vinci*, di cui De Lorenzo mise in efficacissimo rilievo, in scritti molteplici, la figura di precursore della moderna geologia. Sulla base dell' esame diretto dai codici Vinciani, Egli illustrò le chiare vedute che il sommo artista-scienziato ebbe sui « mutamenti della terra ». scienza che noi oggi chiamiamo geologia. Una compiuta storia dei progressi della geologia può definirsi infatti il bel volume, che nella collezione dell' Istituto di Studi Vinciani De Lorenzo pubblicò nel 1920 presso l' editore Zanichelli, col titolo *Leonardo da Vinci e la Geologia*. Suddiviso com'è in tre grandi capitoli — che rispettivamente trattano delle prime intuizioni geologiche presso l' antichità classica fino agli oscuri secoli del Medio Evo, delle idee di Leonardo sopra i problemi offertigli dalla crosta della terra, con le sue rocce ed i suoi fossili e le sue continue vicissitudini e mutazioni, e dello stentato e difficile cammino che la nostra scienza dovè compiere nei tre secoli successivi a Leonardo, per raggiungere faticosamente i suoi cardini basilari — il volume fa risaltare, con l' efficacia dei contrasti, tutta la genialità di quel singolare artista, che, con la potenza del suo ingegno, la sagacia dell' osservazione e il rigore dell' induzione, era pervenuto d' un balzo a concetti e a dimostrazioni, che, solo attraverso molti stenti e molti

errori, sono divenuti, dopo tre o quattrocento anni, i capisaldi della scienza della terra.

Un altro distinto ramo di questa disciplina fu pure coltivato da De Lorenzo: la ricerca paleontologica. Si è già accennato come, fra le prime pubblicazioni destinate ad illustrare la regione nativa, siano compresi alcuni lavori sui *fossili delle argille sabbiose postplioceniche della Basilicata* (1893) e del *Trias medio di Lagonegro* (1896), e si è altresì ricordato un altro suo scritto sopra i caratteri ambientali della *fauna della pietra leccese* (1893); ma non si è detto ancora nulla delle altre ricerche che, tra il 1926 e il 1938, Egli compì sopra i mammiferi quaternari e l' uomo paleolitico del mezzogiorno d' Italia e per le quali non disdegnò la collaborazione dell'ultimo fra i suoi allievi, di colui che oggi vi parla. In questi lavori, che sommano ad una diecina di memorie e note, per la massima parte accolte negli Atti e nel Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, sono esaminati, confrontati ed illustrati tutti i più importanti avanzi che l' *Elephas antiquus italicus*, l' *Hippopotamus amphibius* e gli altri mammiferi lasciarono nelle principali valli fluviali e nei depositi lacustri pleistocenici delle nostre regioni; ne è accertata la contemporaneità con l' uomo paleolitico; ne sono discusse le affinità specifiche e razziali; ne è studiata la filogenia.

Se questi sono gli studi a carattere prevalentemente o esclusivamente paleontologico, non devono essere dimenticati i frequenti elenchi specifici di fossili — basati su esemplari raccolti e determinati da Lui — che accompagnano molte delle sue monografie geologiche, documentandone le conclusioni cronologiche, e comprovano la sua buona preparazione nel campo paleozoologico.

E non è tutto; chè anche della petrografia Egli conosceva metodi di indagine e progressi moderni. Benchè non si professasse petrografo e non si sentisse portato allo studio microscopico delle rocce, alle misure e ai calcoli cristallografici, alle faticose e difficili analisi chimiche quantitative, in cui eccelleva, invece, Carlo Riva, potè dare — anche quando venne a mancargli la preziosa collaborazione del suo indimenticabile amico — un quadro chiaro e ben documentato delle principali varietà di rocce piroclastiche, ignee e sedimentarie incontrate nelle diverse zone studiate e dei loro costituenti mineralogici.

Prima di concludere questa sommaria e disadorna rassegna degli scritti geologici di Giuseppe De Lorenzo, sento ancora l' obbligo di ricordare alcuni lavori di indole didattica, quali ad esempio la *Geografia generale e geologia* per le scuole secondarie, scritta con la collaborazione del prof. Roberto Almagià (parecchie edizioni, dal 1924 in poi), in cui De Lorenzo si era riserbata la stesura dei capitoli di geologia, e gli *Elementi di Geografia fisica* per gli studenti universitari, scritti in collaborazione con G. D'Erasmo (1946).

Caratteristiche e pregi comuni di tutta la produzione scientifica di De Lorenzo sono la sicurezza e la precisione dell'indagine analitica e la genialità e perfezione della sintesi, la ricchezza dei confronti e dei riferimenti artistici e letterari, derivanti, sia le une che le altre, dalla sua eccezionale cultura e potenza d'ingegno; sicchè non è esagerato considerarlo — come giustamente lo definiva Michele Gortani in una lettera inviatami subito dopo la morte di Lui — « uno fra i rari privilegiati, che lettere, filosofia e scienze fisiche ebbero familiari, come le grandi figure del Rinascimento ».

Non meno riconoscibili sono le stesse qualità in una lunga serie di articoli, sparsi in numerosi giornali e riviste, in cui le descrizioni delle forme e dei fenomeni, inorganici ed organici, della terra si abbelliscono e si completano mirabilmente con le visioni dei poeti più famosi, con le intuizioni delle filosofie più varie e più profonde, con le contemplazioni artistiche di ogni tempo e di ogni paese. Molti di questi articoli, opportunamente selezionati ed ordinati, e qualche volta aggiornati e rifatti, costituirono poi distinti capitoli di alcuni fra i più noti e diffusi volumi di De Lorenzo, quali, ad esempio, *Terra madre* (1907) e *La terra e l'uomo* (5 edizioni, 1912 - 1947). Sono capitoli di vera e propria geologia? O, piuttosto, di vera e propria letteratura? O, anche, di vera e propria filosofia? Sono tutto ciò insieme, in splendida fusione di nobile lega.

Perchè non sembri che l'affetto verso il Maestro impareggiabile faccia velo al mio dire, portandomi ad esagerarne involontariamente le doti eccezionali, mi limiterò a riportare solo qualche brevissimo brano, scegliendolo fra i tanti giudizi entusiastici, che su questi volumi ebbero a dare scrittori, scienziati, critici italiani e stranieri (Antonino Anile, Napoleone Colaianni, Francesco Coppola, Aldo De Rinaldis, Louis Gillet, Achille Loria, Andrea Maurel, Giovanni Papini, Giovanni Rabizzani, Paolo Savi Lopez, ecc.).

Ecco come si esprime Antonino Anile - scienziato, letterato e poeta egli pure — in una lunga recensione del volume *Terra madre* (« Il Giornale d'Italia », 8 novembre 1907):

« E' un libro agitatore di idee, che viene da chi al sentimento indagatore della scienza accoppia il sentimento eroico. L'autore esce, volta a volta, dalle pazienti e severe indagini, per cui è in prima linea tra i geologi d'Italia, per risentire la meraviglia delle cose che ci circondano e mantenere vive in sè le sorgenti da cui scaturisce la giovinezza perenne dello spirito. — ... La mentalità analitica d'uno scienziato è negativa se non ha il potere della sintesi; e le vere conquiste nel campo della conoscenza si debbono ad impulsi che derivano più dal sentimento che dal pensiero. *Das Gefühl* — dice Goethe — *ist alles* ».

E nella « Nuova Antologia » del 16 novembre 1907 il critico della rubrica « Tra libri e riviste », nascosto sotto il pseudonimo Nemi, commenta:

« I soggetti di *Terra madre* potrebbero essere trattati nel modo me-

no accessibile ai profani, e al contrario, quando s' affacciano a un cervello ricco d' associazioni di idee, a una fantasia d' artista, svegliano tutto un mondo e possono dar luogo a pagine di magnifica prosa la quale afferra, solleva e trasporta il lettore. – '. . . Il De Lorenzo, dotato d' una larga cultura letteraria, ha presenti tutte le visioni, derivate da felici intuizioni come nei greci e in Shakespeare, o da studi scientifici, come in Goethe, che i grandi poeti ebbero della Terra; e le sue digressioni dalla descrizione scientifica dei luoghi di cui parla sono sempre un bel volo nel cielo della poesia e della filosofia ».

Un altro recensore anonimo così afferma, tra l' altro, nel « Corriere della sera » del 4 luglio 1912:

« I problemi più complessi della geologia, e le spiegazioni e le ipotesi che i moderni geologi hanno proposto per risolverli, vi si connettono — attraverso la varia coltura e la genialità del De Lorenzo — con i più ardui problemi della metafisica, e con le intuizioni che il pensiero umano accese in ogni tempo, come lampade rade in una tenebra vasta, a squarciare in qualche suo lembo il buio onde sono avvolte per noi le supreme ragioni della vita e l' origine e la finalità delle cose ».

Aldo De Rinaldis, artista di squisita sensibilità, già Soprintendente alle Gallerie e alle opere d' arte della Campania e del Lazio, rileva nel quotidiano « Il Mattino » del 10-11 luglio 1912:

« Il geologo parla col linguaggio dell' artista: supera i limiti della scienza, poiche i risultati di essa sono divenuti sentimenti profondi nel suo spirito, e nella polvere, nelle pietre, nei fiumi, nel mondo sottomarino e nel fuoco e nello spasimo creativo della Terra, ci fa seguire la genesi della natura come nelle scene di un dramma senza fine, di qui passa alla evoluzione dei miti della Terra, alle visioni geologiche nelle opere dell' arte e nelle concezioni della filosofia; e la voce della più nobile saggezza antica vibra nell' alto come l' espressione suprema di quelle forze naturali seguìte e colte nella loro drammaticità profonda ».

E Giovanni Rabizzani, letterato di rare facoltà critiche, aggiunge, sempre a proposito degli stessi volumi (« Il Marzocco », 4 agosto 1912):

« Arte, scienza, religione, tre nomi, tre coincidenze: l' arte del singolo, la scienza dell' universale umano, la religione dell' universale divino. E la prima è nella seconda, questa nell' ultima, con un crescendo lirico, che dà le vertigini. Anche si retrocede, per lo stesso cammino, dalla religione alla scienza, dalla scienza all' arte. O meglio si circola: si contiene e si è contenuti. E il mondo obbedisce all' uomo, perchè l' uomo è la misura di tutto.

Il De Lorenzo mi dà motivo a queste inebrianti analogie, con un suo recente volume *La terra e l' uomo*, cui occorre collegare strettamente l' altro, uscito nel 1907, *Terra madre*: due opere in apparenza di divulgazione scientifica, in realtà tali che la scienza vi si trasfigura sotto l' afflato della poesia e della religione ».

Giuseppe Brindisi — autore del più completo ed accurato profilo di De Lorenzo, comparso nel 1923 nella collezione « Contemporanei » dell'editore Casella in Napoli — nota dal canto suo quanto segue:

« Il libro *La terra e l'uomo* ha messo in luce con evidenza innegabile le qualità artistiche dello scienziato, il quale, con vivida commozione lirica, ci ha donato una serie di visioni, ispirate alla contemplazione della Terra nei mutevoli aspetti dell'eterno divenire. —.....— Ricordi autobiografici s'innestano a problemi scientifici e filosofici; descrizioni di paesaggi s'alternano a rievocazioni spirituali: il tutto fuso in una forma personalissima ed animato da una volontà eroica. —..... — Egli ha esaltato ogni più violenta forma di attività umana, ha cantato la divina forza creatrice del fuoco, l'impeto prorompente dei fiumi, il soffio possente dei venti " recanti nei loro sospiri e nei loro sibili gli elementi animatori della vita vegetale ed animale, brulicante sulla crosta della terra madre ". Ha tratto motivi d'arte nella descrizione poliedrica delle molteplici manifestazioni della Vita, nei suoi processi fisici, chimici, cosmogonici e geologici. L'artista fa spesso dimenticare lo scienziato, imbevuto di dottrine filosofiche, di fronte al meraviglioso spettacolo delle bellezze naturali ».

Infine, per tacere d'altri, Louis Gillet, l'insigne storico e critico d'arte francese, accademico di Francia, così scrive nella « Revue des deux mondes » del 15 gennaio 1925, in un articolo intitolato *Un petit-fils de Lucrèce: M. De Lorenzo*:

« Les histoires les plus romanesques ne sont rien, je le déclare, auprès des aventures merveilleuses de la terre. Pendant cinq cents pages, M. De Lorenzo nous tient sous le charme. On va de surprise en surprise. C'est une suite d'hypothèses qui enchantent comme des fables. — ..... Il me semble retrouver parfois dans la noble prose de M. De Lorenzo un écho de cette poésie classique, des accents de ce naturalisme antique, dont le *De rerum natura* demeure le chef-d'oeuvre. Il est impossible de lire certains chapitres de *la Terre et l'homme*, par exemple le merveilleux chapitre sur la poussière, sans songer aux endroits où Loucrèce nous expose la théorie des atomes. On sait gré à ce savant, qui a consacré tant d'études aux montagnes de son pays, de chérir, d'honorer les hommes qui ont vu et aimé les mêmes choses avant lui; il nous plait que la vue du Sirino et du Vulture lui rappelle une strophe d'Horace, le poète de Venosa, ou quelques hexamètres de Giordano Bruno, le moine panthéiste de Nole. Ce sont chez lui des formes du patriotisme: dans ces grandes mémoires des hommes de sa race, M. De Lorenzo reconnaît un accord, une harmonie qu'il retrouve en lui, entre les formes de la pensée et celles de la nature. Le même génie renaît de ce sol éternel. M. De Lorenzo n'est pas un savant sans culture. Il ne partage pas ce préjugé des hommes de science, qui les porte au mépris ou à l'ignorance du passé; il ne croit pas que la

raison ait fait de grands progrès, qu'elle soit aujourd'hui plus puissante qu'elle n'a été dans les grands hommes d'autrefois ».

*
* *

Dalla svariata attività scientifica, che già per sé stessa comprende tutti i campi della Geologia e della Paleontologia, si giunge così gradatamente — attraverso questi scritti in cui alla scienza si accoppia la letteratura, e l'arte alla filosofia — all'attività prevalentemente o esclusivamente letteraria e filosofica, che De Lorenzo ha sviluppata per un sessantennio e che lo ha reso ancora più noto e più stimato nel vastissimo mondo della cultura italiana ed internazionale.

Fin dagli anni giovanili, infatti, come Egli stesso confessa in parecchi suoi scritti, De Lorenzo si era sentito attratto verso la filosofia e la letteratura dalla lettura di pensieri di Schopenhauer e di frammenti di discorsi di Buddho, in qualche parziale traduzione italiana. Questa istintiva inclinazione, affievolita col procedere degli studi universitari e post-universitari, specialmente dedicati alla geologia, tornò a svilupparsi e a rifiorire quando, nella primavera del 1896, venne a Napoli un giovane geologo tedesco, il dr. Emilio Böse, di Amburgo, che, dopo avere studiato le montagne del Tirolo, voleva confrontare il Trias alpino con quello che De Lorenzo aveva da poco scoperto nell'Appennino della Lucania. Durante alcuni mesi di comuni escursioni, i due giovani non solo studiarono la costituzione geologica della Campania, della Lucania e della Calabria settentrionale, ma discussero anche di letteratura e di filosofia, parlando di Goethe e di Schopenhauer, perchè entrambi possedevano una buona cultura umanistica e si interessavano alle civiltà orientali, e specialmente a quella indiana. De Lorenzo apprese così che proprio in quella primavera del 1896 cominciava a pubblicarsi, a Lipsia, la grande opera di traduzione dei testi pâli dei *Discorsi di Buddho*, intrapresa dall'indologo Karl Eugen Neumann di Vienna. La conoscenza di tali traduzioni, e poi quella dello stesso Neumann — trasformata in fraterna affettuosa amicizia negli anni successivi, fino all'immatura morte di quest'ultimo, cinquantenne, avvenuta a Vienna nell'ottobre 1915 — erano destinate ad avere la più grande influenza su De Lorenzo, determinandone stabilmente tutto l'ulteriore indirizzo di vita e polarizzandone gli studi specialmente verso la letteratura e la filosofia dell'India antica.

Tali studi cominciarono nel 1896 con una traduzione del *Catechismo buddhistico* di Subhadra Bhiksu (due edizioni, negli anni 1897 e 1922), a cui fecero sèguito parecchi articoli e saggi in giornali e riviste diverse, ma l'opera che segnò una prima e grande tappa in questo campo fu senza dubbio il volume *India e buddhismo antico*, che raggiunse, tra il 1904 e il 1926, ben cinque edizioni e fu oggetto di recensioni entusiastiche e di

discussioni talora vivaci, attestanti la vasta risonanza e l'enorme interesse suscitati da quelle dottrine in tutto il mondo culturale contemporaneo.

Dopo di esso si succedettero a brevi intervalli altri volumi ed opuscoli, fra i quali si possono ricordare, in ordine cronologico e tacendo di quelli minori: *Morale buddhista* (1920), *Shakespeare e il dolore del mondo* (1921), *Il sole del Gange* (1925), *Oriente e occidente* (1931), *Gli ultimi giorni di Gotamo Buddho* (1948), *Grandi orme* (1949), *Scienza d'occidente e sapienza d'oriente* (1953). Alcuni di questi volumi raccolgono, come distinti capitoli, le note che De Lorenzo aveva presentate e pubblicate all'Accademia delle Scienze di Napoli o all'Accademia Pontaniana.

Frutto di più lungo e paziente lavoro, apprezzatissimo in tutti gli ambienti filologici e filosofici, sono poi alcune monumentali traduzioni, quali quella completa, dal tedesco, di Schopenhauer, *Il mondo come volontà e rappresentazione* (in due volumi, 1928 e 1930), fatta, per il primo volume, in collaborazione con Paolo Savi-Lopez, e quella, altrettanto completa, dal canone pâli, dei centocinquantadue *Discorsi di Gotamo Buddho* della Raccolta Media, o *Majjhimanikâyo* (in tre volumi, editi tra il 1907 e il 1927), eseguita con la collaborazione del dott. Karl Eugen Neumann. Una versione diretta dal sanscrito è il poemetto, popolarissimo nell'India, conosciuto sotto il nome *Caurapancâshikâ*, ossia *Il canto del ladro d'amore* (1925), ed un'altra traduzione dal tedesco è il volumetto, abbastanza recente (1951) su *L'opera d'arte buddhistica*, che raccoglie alcuni saggi pubblicati tra il 1904 e il 1906 a Lipsia e a Monaco di Baviera nei *Süddeutsche Monatshefte* dal predetto suo amico e collaboratore K. E. Neumann.

Tutte queste versioni, le quali sono chiara dimostrazione della sua padronanza di difficili lingue asiatiche, quali il sanscrito ed il pâli, e di tutte le principali lingue europee moderne, hanno dato all'Italia, dopo la Germania, il primato nella conoscenza degli antichi testi del Buddhismo e rappresentano ancor oggi quanto di meglio esista nel nostro paese, per esattezza di interpretazione e bellezza di traslazione, essendo resa la perfetta musicalità dei testi originari, come solo poteva fare chi, maestro di filologia, fosse anche capace di poesia. E versioni veramente poetiche, talvolta improvvisate, De Lorenzo fornì pure, con la traduzione di qualche sonetto di Shakespeare (1901), e del *Canto degli spiriti sulle acque* di Goethe (vedi *Carlo Riva. Ricordi*, 1902, pp. 52-53).

Che cosa abbia inteso di fare De Lorenzo con la lunghissima serie di scritti di antica filosofia indiana è stato esplicitamente e ripetutamente dichiarato da lui stesso in vari lavori. Come opportunamente hanno rilevato De Rinaldis e Brindisi nei loro profili e recensioni del nostro commemorato, De Lorenzo non ha mai avuto la pretesa di istituire un neo-buddhismo italico, nè di uniformare la sua vita ai dettami che regolano le pratiche esterne di quella religione; ha inteso, invece, di fare opera non di propaganda, ma di semplice documentazione, di quei singolari monumenti d'arte

e di pensiero, che ci vengono dall'antica India. Egli si limita a riferire e ad esporre pensieri dei grandi genî d'oriente e d'occidente, visioni di grandi occhi del mondo, che ha avuto la fortuna di accogliere nella sua mente, e che altri non ha avuto nè il tempo, nè il modo di conoscere. Considera perciò, con infinita modestia, prettamente didattica la sua funzione di trasmettitore della luce dei vari pensatori, che hanno rischiarato il suo spirito, e si dice pago se essa riuscirà ad illuminare di qualche riflesso altre menti, così da poter dire a sè stesso: « ego quod meum est feci ».

Di fronte a queste ripetute ed esplicite dichiarazioni del Nostro studioso, mal si appongono quei critici o commentatori, che lo accusano di aver tentato di trapiantare un Buddhismo in Europa. Fuori dell'Asia il Buddhismo non sarebbe più Buddhismo.

E' perfettamente comprensibile, invece, che la trattazione di problemi così ardui dello spirito, che investono le radici stesse dell'esistenza e le fondamenta delle religioni dei popoli, non abbia trovato unanimità di consensi e possa aver suscitato anche critiche vivaci e discussioni molteplici. Non reca pertanto meraviglia il fatto che fra i numerosissimi recensori dei volumi più notevoli di De Lorenzo (C. Barbagallo, F. Belloni-Filippi, G. A. Borgese, F. Coppola, S. De Pilato, A. De Rinaldis, F. De Roberto, G. Fittipaldi, R. Forster, F. Gaeta, G. S. Gargano, G. Gentile, L. Luzzatti, F. Mauthner, A. R. Manfredi, E. Marroni, E. Mircea, G. Papini, P. E. Pavolini, E. Pinto, I. Pizzi, G. Renzi, P. Savi-Lopez, V. Serra, V. Spinazzola, L. Tonelli, G. Vacca, G. Vorluni, G. Zuppone Strani, e tanti altri), non mancarono alcuni che giudicarono con severità qualche scritto di Lui, accusandolo di parzialità eccessiva nei riguardi della filosofia indiana e di soverchio amore per il Buddhismo. Così, ad esempio, Italo Pizzi (« La favilla », anno XXIII, pp. 336-338. Perugia, 1904) ritiene « difettosa per soverchio giudizio subiettivo » l'opera di De Lorenzo, specialmente allorchè confronta il Buddhismo col Cristianesimo; Ferdinando Belloni-Filippi (« Leonardo », anno II, pp. 563-564. Milano, 1931) dissente dall'opinione che i germi della sapienza brahmanica e buddhista possano aver contribuito al sorgere del Cristianesimo; e Federico De Roberto (« Corriere della Sera », Milano, 29 aprile 1904) rileva che nel De Lorenzo il critico si muta troppo presto in apologista, così che « egli ammira, riverisce e venera talmente quel verbo, da ritenere a tutto suo vantaggio ciò che per un giudice meno preoccupato è inferiorità e difetto: la mancanza, per esempio, dello spirito di sacrifizio, della sete di martirio, dell'impeto di carità ».

Tuttavia, si deve obiettivamente constatare come tutti costoro abbiano ammesso, nel Nostro, una vasta conoscenza della filosofia indiana, di quella greca e anche di quella recente tedesca, e come lo abbiano ritenuto uomo coscienzioso e leale, che, dopo aver tanto esaltato il Buddhismo, non gli riconosce un vero carattere di religione, ma piuttosto lo considera un modo di filosofare, che, come tale, appartiene solo ai dotti ed ai filo-

sofi, « sempre solo a una piccola schiera, sempre solo ad uno o ad un altro solitario, segregato, costante e ferreo pensatore ». Ben diversa appare, pertanto, questa obiettiva e serena valutazione dell'insegnamento di Buddho nelle pubblicazioni di De Lorenzo, rispetto alla esagerata predilezione di Arturo Schopenhauer, il quale nel pensiero indiano vedeva la leva che avrebbe rinnovato la mentalità europea, elevandola ad altezze sublimi.

Ma, per concludere ormai su questo argomento, basterà ricordare la giusta opinione espressa da qualcuno fra i nostri maggiori scrittori e filosofi. E sarà meglio esporre, anche questa volta, con fedeltà le loro affermazioni, riportando integralmente qualche brano dei giudizi di ciascuno di essi.

In una recensione del volume *India e Buddismo antico*, Giovanni Papini (« Il Regno », anno I, n. 5, p. 14. Firenze, 27 dic. 1903) così si esprimeva:

« Il De Lorenzo non conosce solo il Buddismo ma anche, si può dire, il pensiero e l'arte mondiale e una delle parti più caratteristiche del suo libro è costituita dai raffronti delle dottrine di Gotamo Buddho con quelle di Platone, di Kant, di Nietsche, di Shakespeare e di S. Francesco.

E non solo ha della scienza ma dell'amore; si sente ch'egli ama ed ammira la figura e la parola del vecchio profeta indiano, dolce, profondo e sereno tanto nei suoi discorsi che nei simulacri di pietra ».

In un importante saggio critico sullo stesso volume, Giovanni Gentile («La Critica », anno II, pp. 128-132. Napoli, 20 marzo 1904; « Saggi critici », s. 1ª, pp. 159-166. Napoli, Ricciardi, 1921) aggiungeva testualmente:

« Il De Lorenzo è valoroso insegnante e studioso di geologia; ma è anche lettore appassionato di poeti e di pensatori non per vanità di dilettante, anzi per potente bisogno d'un animo delicato e di uno spirito vigorosamente speculativo. Legge i poeti con finezza e penetrazione superiore a quella di molti letterati di professione, e medita le filosofie dei grandi, non per recarvi un'informazione da erudito, ma per assaporarvi l'aspro gusto dei pensieri difficili e profondi. Nelle *horae subsecivae*, che gli lasciano gli aridi studi cui ha consacrato specialmente la sua attività scientifica, si rifà del silenzio misterioso e triste della natura inconsapevole bevendo avido alle più ricche fonti spirituali dell'umanità la parola più intensa delle anime, la parola che più intensamente gli faccia vibrare le intime corde dell'anima.

Il suo poeta perciò è Shakespeare: « il più grande dei poeti », come egli lo definisce, e « il più sereno ed obiettivo degli umani pensatori ». E così come la serenità del pensatore la trova nel suo poeta, egli cerca nei suoi pensatori il sentimento, la fantasia, l'estro, il furore dei poeti: e perciò suoi autori sono Platone, Bruno, Schopenhauer, Nietsche; ma soprattutto il Buddho, il grande, il sublime Svegliato, i cui divini Discorsi,

tradotti ora in tedesco dal Neumann, arrivano a lui documento autentico di un insegnamento perpetuatosi attraverso due millenni e mezzo e, sebbene alterato, ancor atto a nutrire gli spiriti di cinquecento milioni d'uomini (più di un terzo dell' umanità intera). Beve questa parola, che di fronte alla muta natura gli svela il senso profondo dello spirito consapevole, e si compiace di notare che essa esprima sempre il pensiero medesimo, sia che risuoni pacata e solenne sulla bocca di Gotamo a pie' del nevoso Himâlayo, o che riecheggi dalla gemina Grecia col grande Eraclito e col divino Platone; sia che la ripeta, alunno dei greci, in Roma, Orazio scettico, o la predichi, dopo parecchi secoli, con possente fervore di fede Francesco d' Assisi. Michelangelo parrà intuirla ne' suoi eterni fantasmi e l' accennerà apertamente in una sua « mirabile » lettera al Vasari. La ridirà con tragico accento Amleto; e il Recanatese la martellerà nel suo verso accorato, o commenterà nella sua prosa funerea. Tornerà a tradurla in filosofemi lo Schopenhauer con sarcasmo amaro, e la dommatizzerà ancora con la sicurezza ispirata dell' estro il novello Zarathustra. Ma sarà sempre la stessa parola. Tutti gli spiriti magni della sua letteratura preferita e della sua filosofia fraternizzano innanzi al De Lorenzo in una comune, eloquente, commovente affermazione dell' essenza intima dell' uomo e della sua radicale aspirazione. Egli ascolta ammirando e fremendo, e prorompe a ogni tratto in esclamazioni, in epiteti di superlativa ammirazione e in manifesti segni di vivo assentimento; discepolo docilissimo di questi grandi maestri, di sentire i quali in sè stesso s' esalta, e che gli appaiono forse, come gli spiriti magni danteschi, in un limbo, senza spazio e senza tempo, dove tutte o quasi le differenze storiche si dileguano, e si parla appunto un solo linguaggio, l' eterno linguaggio dell' anima umana.

Dilettazione anche questa di cultura raffinata che guarda non solo alle opere artistiche, ma alle filosofiche e religiose da un punto di vista prevalentemente artistico, e genera perciò un sentimento disinteressato, per usare la impropria frase kantiana, che esprime appunto quella specie di godimento contemplativo che non muove all' azione, perchè non tocca l' individualità dell' uomo, radice dell' operare ».

E Giovanni Rabizzani (« Il Marzocco », anno XVII, n. 31, p. 2. Firenze, 4 agosto 1912) così confermava:

« De Lorenzo tende a divulgare quelle idee, quei paragoni, quella morale non già col desiderio di far dei proseliti, ma per intimo bisogno, per un anelito lirico. In definitiva ogni saggio è una variazione su determinati temi scientifici dai quali lo scrittore presto s' invola per inseguire fantasie di poeti e meditazioni di solitarî ».

Com' è opportunamente ricordato dal Gentile, De Lorenzo, esponendo i valori religiosi e sociali del Buddhismo, ha indicato le analogie con le concezioni di alcuni grandi spiriti occidentali, specialmente italiani, quali

Lucrezio, San Francesco, Dante, Michelangelo, Leonardo, Bruno, Vico, Leopardi, a cui vanno ancora aggiunti tanti altri (Socrate, Luciano, Marco Aurelio, Kant, Goethe, Schopenhauer, ecc.), « maestri di sapienza e di vita », com' egli li definisce, giacchè . l' insegnamento di essi ha ancora per noi vivo valore . Sono questi gli *spiriti magni* del passato, a cui De Lorenzo si abbeverò come a sorgente perenne, dedicando i suoi *otia* alla lettura delle loro opere, chiudendosi nel suo studio a conversare con loro quando il peso degli anni gli vietava di andare pei monti a rompere le rocce col suo martello geologico. E, a contatto sempre più intimo con queste grandi figure dell' umanità, De Lorenzo finì per assumerne gli atteggiamenti, le predilezioni, il tenore di vita; amò gli animali, la vita contemplativa, la solitudine, come Lucrezio, Bruno, Leonardo e gli altri sommi, che ne nobilitarono l' intelletto ed affascinarono lo spirito; divenne così, agli occhi nostri, egli stesso, maestro di sapienza e di vita.

* * *

Se lo studioso si rivela facilmente attraverso le opere, l' uomo non può essere reso noto se non da colui che l' ha conosciuto, stimato ed amato.

Di modesti natali, ed orfano, fin dalla prima infanzia, della madre, De Lorenzo perdette il padre quando contava appena tredici anni. La sua giovinezza fu disseminata di non pochi dolori dignitosamente sofferti e di ostacoli vittoriosamente superati; e tutta la sua vita fu caratterizzata da una serie di tappe, che rappresentano altrettanti gradini verso le fulgide mete, raggiunte esclusivamente con le forze dell' ingegno e della volontà. Se l' ingegno e la volontà lo sospinsero ben presto, come si è detto, verso un così vasto e vario campo di conoscenza — aperto all' arte, alla letteratura e alla filosofia da un lato, agli studi naturalistici, e specialmente geologici, dall' altro — l' ambiente di vita culturale napoletana della fine dell' Ottocento non fece che sviluppare e rafforzare in Lui queste naturali tendenze. Vivendo ed operando in quegli ambienti di alta spiritualità della nostra città, Giuseppe De Lorenzo portava dappertutto la sua inconfondibile nota di pacata signorilità, di vivace chiarezza, di geniale intuizione, di serena obiettività. Alto, diritto, asciutto, con la bella testa da romano antico accuratamente rasa — che un busto in bronzo di Saverio Gatto ha saputo riprodurre alla perfezione nei suoi nobili lineamenti – Egli faceva risuonare la sua chiara voce armoniosa nelle conversazioni e discussioni di scienza, d' arte, di poesia, di letteratura, di filosofia e, assai più raramente, di politica.

Benchè senatore del Regno, dal 1913 al 1945, non partecipò mai assiduamente all' attività parlamentare, intervenendo solo a quelle adunanze che nei periodi più cruciali della storia italiana gli parvero d'importanza

decisiva per le fortune della Patria. Pur non sentendosi nato per la politica, perchè uomo di studio e di pensiero, non volle tuttavia mancare all' adempimento di quelli che considerava precisi doveri della carica, e servì il paese nella maniera più degna, con la forza della sua parola, allorchè, durante la grande guerra 1915-1918, con una serie di articoli pubblicati qua e là e poi raccolti in volume (*Italae vires*, 1916), si propose, nella gravissima crisi, di illuminare, con evocazioni del passato, col pensiero dei grandi, la coscienza nazionale, richiamandola ai più nobili ideali col suo patriottismo di pura tempra latina. E lo servì anche con l'azione, allorchè, nel 1919, all' epoca delle rivendicazioni di Fiume e di Zara, si trovò a far da paciere tra gli animi accesi, e in forte contrasto, tutti per nobili fini, di D' Annunzio, Millo e Nitti.

Fra le qualità che maggiormente lo distinsero sono da ricordare la semplicità quasi infantile, l' afflato di umana simpatia verso gli uomini e gli animali e, soprattutto, lo spiccato senso di modestia : effetto singolare, che la potenza dell' ingegno produce negli uomini veramente grandi, tutti esemplarmente modesti. Modesto nella vita e modesto anche negli scritti, ebbe coscienza delle sviste e delle lacune, che possono facilmente occorrere in scienze e in regioni complicate « in cui ogni nuova escursione offre allo studioso nuovi problemi e annoda nuovi misteri ». Basta ricordare, a tale proposito, le parole con cui si chiude la sua importantissima memoria sui laghi pleistocenici dell' Italia meridionale : « ... in queste, come in tutte le ricerche scientifiche, dietro ogni difficoltà sciolta, se ne affacciano cento altre nuove e insolute ; e sempre imperscrutabilmente profonda rimane la vera essenza della natura. Sembra di procedere, e non si fa che camminare lungo una linea, di cui i due capi, con mille giri tortuosi, si perdono nell' infinito. E per noi geologi restano eternamente vere le profonde parole scritte da Goethe nelle *Einzelne Betrachtungen und Aphorismen über Naturwissenschaft :* « Steine sind stumme Lehrer, sie machen den Beobachter stumm, und das Beste was man von ihnen lernt ist nicht mitzutheilen ».

In un recente profilo di De Lorenzo, Margherita Sarfatti (« Aspetti letterari. Lucania d' oggi », anno XIII, fasc. 1-3, pp. 65-67. Napoli, ottobre 1953 ; « Roma », anno XCII, n. 306, p. 3. Napoli, 3 novembre 1953) rileva, non senza acutezza , che il ritratto , fisico e psicologico, tracciato , quasi due secoli or sono, da Johann Gottfried Herder per il suo maestro Emanuele Kant e riportato — quasi segreta premonizione profetica — da De Lorenzo in uno dei suoi più recenti saggi (1953), si addice esattamente a Lui. Eccolo qui dipinto : « La lieta vivacità di un giovinetto lo accompagna nella grigia vecchiaia. La fronte ampia, costruita per il pensiero, è sede di indistruttibile serenità e letizia. La pensosa parola fluisce dalle sue labbra, insieme con lo scherzo, il motto di spirito e l' arguzia, e la sua lezione è una dilettosa conversazione. Accoglie scritti e scoperte mo-

derne, ritornando sempre a valutarle sul valore morale dell' uomo. Nulla gli è indifferente di quanto è degno di essere saputo ».

Schivo di onori, accettò di buon grado soltanto quelle cariche, l'esercizio delle quali considerava come un dovere professionale o civico. Io ho appreso solo dopo la sua morte, consultando la vecchia corrispondenza ufficiale rimasta in una sua cartella presso l' Istituto Geologico di Napoli, l' appartenenza di Lui a parecchi Comitati e ad altri Sodalizi scientifici italiani e stranieri, che lo avevano voluto nel loro seno. Tutti sanno che era il decano della nostra Società, essendo stato nominato corrispondente dell' Accademia di Scienze fisiche e matematiche il 14 luglio 1900 e socio odinario residente il 12 novembre 1904; che aveva in essa ricoperto la carica di segretario nel triennio 1913-1915 e nel triennio 1919-1921, e la carica di presidente negli anni 1918, 1930 e dall' ottobre 1935 al novembre 1944; che era stato presidente generale della Società nel 1944 e nel 1950. Altrettanto nota è la sua appartenenza, fra le Società napoletane, all' Accademia Pontaniana dal 5 aprile 1908, all' Istituto d' Incoraggiamento dal 7 maggio 1908, alla Società dei Naturalisti dal 5 agosto 1894. Ma si può ancora ricordare che Egli era altresì il più anziano dei soci nazionali dei Lincei, con nomina dal 17 settembre 1923, che era socio effettivo dell' Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania, e che apparteneva, in qualità di corrispondente, all' Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Acireale, all' Accademia Peloritana di Messina, all' Accademia Lucchese di Scienze, Lettere ed Arti.

Era pure membro dell' Istituto Italiano di Paleontologia Umana in Firenze, ed aveva fatto parte, dal 1° gennaio 1929, del Comitato Nazionale di Geologia e del Comitato Nazionale geodetico-geofisico del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Ricordo ancora — fra gli altri Comitati scientifici e tecnici italiani che lo avevano voluto nella loro compagine — il Comitato Vulcanologico di Napoli, le Commissioni per lo studio dei terremoti calabresi, per gli scavi di Ercolano, per le onoranze a Ulisse Aldrovandi e a Leonardo da Vinci, per la conservazione dei monumenti e scavi della provincia di Napoli, per il restauro del Museo Nazionale di Napoli, per la tutela del paesaggio ecc.; le Deputazioni di Storia Patria di Napoli, della Lucania e Calabria; il Consiglio Superiore delle acque e foreste; il Consiglio di Amministrazione della Stazione Zoologica ecc.; e, fra le principali Società straniere di cui era stato chiamato a far parte, la Geological Society di Londra, la Société Géologique de Belgique, l' India Society di Londra, il Geologisches Reichsanstalt di Vienna, la Schopenhauer Gesellschaft di Berlino, ecc.

Era stato insignito dal Governo italiano della Commenda dei SS. Maurizio e Lazzaro e del grado di Cavaliere di Gran Croce della corona d' Italia. Per il contributo da Lui portato alla conoscenza dell' Asia in Italia,

l'attuale Imperatore del Giappone volle personalmente decorarlo in Napoli, nel 1921, del grado di Grande Ufficiale dell'ordine del Sol Levante.

In riconoscimento degli eccezionali suoi meriti di studioso, la città di Lagonegro, orgogliosa di avergli dato i natali, volle rendergli, nell'ottobre del 1911, solenni onoranze, offrendogli un'artistica pergamena, miniata da Andrea Petrone, in cui, sullo sfondo del monte Sirino e delle rocce del Carboncello, sotto i castagni ondeggianti al vento, è l'affettuosa dedica dei suoi concittadini. Nel maggio 1957, circa un mese prima della morte di Lui, la Deputazione Provinciale di Potenza, su proposta del presidente comm. Picardi, aveva all'unanimità deliberato — quale attestato della sua ammirazione — un diploma di benemerenza con medaglia d'oro. E ancora più recentemente, il dì 11 ottobre scorso, in occasione del 59° Congresso della Società Geologica Italiana, è stata apposta sul ponte del fiume Serra, presso Lagonegro, una lapide commemorativa dell'insigne Maestro. Si può ancora ricordare che ulteriori onoranze, fissate per una prossima data, sono state decise dalla stessa città di Lagonegro, con la costruzione di un piccolo monumento, l'apposizione di una lapide-ricordo e la intitolazione di una piazza al nome di Lui.

Non costituì una famiglia propria, perchè amò, come Leonardo, la solitudine, ma ne formò una spirituale, adottando, nel 1929, la figlia minore del concittadino ed amico carissimo Vincenzo Odierno, che aveva sorretto ed aiutato Lui, orfano e fanciullo. Poteva così raggiungere l'intento di ricambiare, dopo la morte dell'amico e del protettore, i beneficî ricevuti. E la buona e brava figlia adottiva, prof. Anna, corrispose, insieme con le sorelle Ernesta e Maria, con la maggiore tenerezza e con le più assidue cure, all'affetto di Lui, alleviandogli le ultime sofferenze e rendendogli sereno e quasi inavvertito il trapasso, come Egli aveva desiderato e scritto nei suoi libri, allorchè aveva trattato della concezione buddhista dell'annientamento finale.

Le ultime parole, che Gotamo Buddho aveva rivolte ai monaci radunati intorno a lui, alle falde del Himâlaya, allorchè sentiva approssimarsi la fine, Egli ha lasciate scritte quali ultime sue volontà: benchè più semplici, più brevi e più moderne nella forma, esse ripetono gli stessi concetti, il medesimo desiderio di essere sepolto senza pompa, come il più povero dei poveri, gli identici consigli di modestia, di onestà, di virtù alla sua diletta figlia adottiva.

Così visse e morì Giuseppe De Lorenzo, questo grande spirito solitario, che, pur avendo raggiunto le più alte vette della conoscenza scientifica e della dottrina letteraria e filosofica, era rimasto semplice e modesto, lontano da ogni superbia, reverente innanzi all'inconoscibile mistero della vita e del mondo, facendo suoi i motti di Leonardo: « salvatico è chi si salva » e « se tu sarai solo, tu sarai tutto tuo » e di Giordano Bruno: « Nes-

suno può gustare che cosa sia tranquillità di spirito se non è povero o simile al povero ».

Ho tentato, Colleghi, di esporvi, come ho potuto, la figura e l'opera multiforme del mio Maestro, presentandovene successivamente — per seguire il mio indirizzo naturalistico — i vari aspetti; ma riconosco, d'accordo con Giuseppe Brindisi, che la personalità di Lui è talmente complessa nel suo polimorfismo e presenta una così netta ed inscindibile unità da rendere vano ed artificioso ogni tentativo di sezione anatomica o di schematizzazione.

Perdonatemi, quindi, voi che mi avete seguito fin qui, per il modo col quale ho male adempiuto questo dovere, che era altresì un precipuo bisogno dell'animo mio; e mi perdoni soprattutto lo spirito immortale di Giuseppe De Lorenzo, che non può considerarsi distrutto con la scomparsa materiale di Lui, ma che continua a vivere attraverso le sue opere, nobilissimo retaggio di un'anima grande, orma duratura come quella degli spiriti magni, che Egli predilesse e seguì nella dottrina e nella norma di vita.

Napoli, Istituto geologico dell' Università, 13 ottobre 1957.

ELENCO CRONOLOGICO DELLE PUBBLICAZIONI

AVVERTENZA. — *Quest'elenco bibliografico, che; per quanto diligentemente compilato sull'esame diretto dei volumi, dei periodici, dei giornali e degli estratti, non pretende di essere completo — data la grande quantità di scritti minori e di articoli vari, inseriti in moltissime riviste italiane e straniere — non fa se non eccezionalmente menzione di alcune brevi presentazioni di lavori altrui* (1), *e non cita quasi mai le recensioni critiche* (2) *o le relazioni scientifiche e accademiche* (3), *redatte dallo stesso De Lorenzo o da Commissioni delle quali Egli faceva parte, e neppure gli articoli pubblicati con pseudonimi diversi* (4). *A maggior ragione non sono riportate le sue opinioni su argomenti di attualità (eruzioni vulcaniche, terremoti, ecc.), espresse in interviste accordate a giornalisti e pubblicate sotto il nome di questi* (5).

A titolo di esemplificazione vengono citati qui appresso, in nota, soltanto alcuni fra questi scritti di minore importanza, che mi si presentano sott'occhio e possono servire a meglio lumeggiare la versatile attività di Giuseppe De Lorenzo.

Osservazioni geologiche nei dintorni di Lagonegro in Basilicata. « Rend. Acc. Lincei », Cl. Sc. fis., s. 5ª, vol. I, 2° sem., pp. 316-317. Roma, 1892.

Avanzi morenici di un antico ghiacciaio del Monte Sirino nei dintorni di Lagonegro (Basilicata). « Rend. Acc. Lincei », Cl. Sc. fis., s. 5ª, vol. I, 2° sem., pp. 348-353, figg. 2. Roma, 1892. — « Boll. Soc. alpina merid. », anno I, pp. 38-43, figg. 2. Napoli, 1893.

Sul Trias dei dintorni di Lagonegro in Basilicata. « Atti Acc. Sc. fis. e mat. », s. 2ª, vol. V, n. 8, pp. 1-48, figg. 26. Napoli, 1892. — Sunto in: « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 2ª, vol. VI, p. 186. Napoli, 1892.

---

(1) HEARN L. *Gleaning in Buddha Fields.* Trad. di G. De Georgio, prefaz. di G. De Lorenzo. Bari, Laterza, 1908. — HEARN L. *Kokoro.* Trad. di G. De Georgio, prefaz. di G. De Lorenzo. Bari, Laterza: 1ª ed., 1906; 2ª ed., ed., 1920. — SHIMOI H. *La guerra italiana: impressioni di un giapponese.* Napoli, 1919. — SHIMOI H. *I discorsi di Mussolini tradotti in lingua giapponese.* « Il Mezzogiorno », anno X, n. 129, p. 5. Napoli, 29-30 maggio 1927.

(2) Recensione dell'opera di S. DASGUPTA, *A history of indian philosophy*, vol. I. Cambridge, 1922, in « La critica », anno XXII, fasc. 5°, pp. 309-312. Napoli, 20 sett. 1924.

(3) *Relazione sui lavori compiuti dall'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli durante gli anni 1913, 1914, 1915, 1919, 1920, 1921.* « Rendic. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 3ª, voll. XX-XXII e XXVI-XXVIII. Napoli, 1914-1916 e 1920-1922.

(4) *Per l'Osservatorio Vesuviano.* « Il Mattino », anno VI, n. 49, p. 2. Napoli, 18-19 febbraio 1897 (col pseudonimo *Un partenopeo*). — *I paradossi della scienza.* « Il Mattino », anno VI, n. 92, p. 2. Napoli, 2-3 aprile 1897 (col pseudonimo *Un geologo*). — *Le scienze del tempo e dello spazio.* « Il Mattino », anno VI, n. 108, p. 2. Napoli, 18-19 aprile 1897 (col pseudonimo *Un geologo*). — *Paesaggi della Basilicata.* « Il Mattino illustrato », anno II, n. 2, p. 4, figg. 3. Napoli, 3 gennaio 1904 (col pseudonimo *Hammer*). — *Un ritratto di Alessandro Magno a Pompei.* « Il Mattino illustrato », anno II, n. 21, p. 11, fig. 1. Napoli, 22 maggio 1904 (col pseudonimo *Indos*).

(5) *La parola della scienza (Sul terremoto calabrese del settembre 1905).* Intervista di A. Falcone. « La Tribuna », anno XXIII, n. 266, p. 2. Roma, 24 settembre 1905. — *Le cause del terremoto.* Intervista di F. Coppola. « La Tribuna », anno XXVII, n. 6, p. 3. Roma, 6 gennaio 1909. — *Gli ultimi giorni di Ercolano nella ricostruzione del senatore Giuseppe De Lorenzo.* Intervista di A. Barone. « Il Mezzogiorno », anno X, n. 15, p. 3. Napoli, 18-19 gennaio 1927.

Per la geologia della penisola di Sorrento. « Rend. Acc. Lincei », Cl. Sc. fis., s. 5ª, vol. II, 1° sem., pp. 202-203, figg. 2. Roma, 1893 (in collaborazione con F. BASSANI).

Fossili nelle argille sabbiose postplioceniche della Basilicata. « Rend. Acc. Lincei », Cl. Sc. fis., s. 5ª, vol. II, 1° sem., pp. 347-350. Roma, 1893.

Il postpliocene morenico nel gruppo montuoso del Sirino in Basilicata. « Rend. Acc. Lincei », Cl. Sc. fis., s. 5ª, vol. II, 2° sem., pp. 317-320, figg. 2. Roma, 1893.

La fauna bentho-nektonica della pietra leccese (Miocene medio). « Rend. Acc. Lincei », Cl. Sc. fis., s. 5ª, vol. II, 2° sem., pp. 91-96 e 119-125. Roma, 1893.

Il Monte Consolino di Stilo. « Atti Acc. Sc. fis. e mat. », s. 2ª, vol. VI, n. 8, pp. 1-8, tav. 1. Napoli, 1893 (in collaborazione con F. BASSANI).

Osservazioni geologiche sul tronco ferroviario Casalbuono-Lagonegro della linea Sicignano-Castrocucco. « Atti Ist. Incoragg. », s. 4ª, vol. VII, n. 5, pp. 1-5, tav. 1. Napoli, 1894.

Sulla geologia dei dintorni di Lagonegro. « Rend. Acc. Lincei », Cl. Sc. fis., s. 5ª, vol. III, 1° sem., pp. 135-139, 309-312 e 351-354. Roma, 1894.

Le montagne mesozoiche di Lagonegro. « Atti Acc. Sc. fis. e mat. », s. 2ª, vol. VI, n. 15, pp. 1-124, tavv. 2, figg. 34. Napoli, 1894.

Osservazioni geologiche nell'Appennino della Basilicata meridionale. « Atti Acc. Sc. fis. e mat. », s. 2ª, vol. VII, n. 8, pp. 1-31, figg. 12. Napoli, 1895.

Lava pahoehoe effluita il 24 maggio 1895 dal cono terminale del Vesuvio. « Rend. Acc. Lincei », Cl. Sc. fis., s. 5ª, vol. IV, 2° sem., pp. 10-19, fig. 1. Roma, 1895.

Sulla probabile esistenza di un antico circo glaciale nel gruppo del monte Vulturino in Basilicata. « Boll. Soc. geol. it. », vol. XIV (1895), pp. 169-172, fig. 1. Roma, 1895.

Efflusso di lava dal gran cono del Vesuvio cominciato il 3 luglio 1895. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 3ª, vol. I, pp. 183-194, figg. 3. Napoli, 1895.

Giordano Bruno nella storia della geologia. « Boll. Soc. Natural. », vol. IX, pp. 29-37. Napoli, 1895.

Bemerkungen über die Trias des südlichen Italien und Siciliens. « Verhandl. geol. Reichsanst. », 1895, n. 17 e 18, pp. 483-484. Wien, 1895.

Noch ein wort über die Trias des südlichen Italiens und Siciliens. « Verhandl. geol. Reichsanst. », 1896, n. 9, pp. 275-277. Wien, 1896.

Studii di geologia nell'Appennino meridionale. « Atti Acc. Sc. fis. e mat. », s. 2ª, vol. VIII, n. 7, pp. 1-128, figg. 12. Napoli, 1896.

Geologische Beobachtungen in der südlichen Basilicata und dem nordwestlichen Calabrien. « Jahrb. k. k. geol. Reichsanst. », vol. 46, pp. 235-258, figg. 8. Wien, 1896 (in collaborazione con E. BÖSE).

Fossili del Trias medio di Lagonegro. « Palaeont. ital. », vol. II, pp. 113-148, tavv. 6. Pisa, 1896.

Per la geologia della Calabria settentrionale. « Rend. Acc. Lincei », Cl. Sc. fis., s. 5ª, vol. V, 2° sem., pp. 114-116. Roma, 1896 (in collaborazione con E. BÖSE).

Zur Geologie der Monti Picentini bei Neapel. « Zeits. deuts. geol. Gesells. », vol. XLVIII, pp. 202-215, figg. 2. Berlin, 1896 (in collaborazione con E. BÖSE).

Catechismo buddistico, per avviamento nella dottrina di Gotamo Buddo, di Subhadra Bhikshu (traduzione): 1ª ediz. Napoli, Marghieri, 1897. Op. in 16°, pp. 81; 2ª ediz. Napoli, Ricciardi, 1922. Op. in 16°, pp. XVI+75.

Der Vesuv in der zweiten Hälfte des sechszehnten Jahrhunderts. « Zeits. deuts. geolog. Gesells. », vol. XLIX, pp. 561-567, fig. 1. Berlin, 1897.

Reliquie di grandi laghi pleistocenici nell'Italia meridionale. « Atti Acc. Sc. fis. e mat. », s. 2ª, vol. IX, n. 6, pp. 1-74, tavv. 5, figg. 30. Napoli, 1898.

Cenni geologico-agrari sulla Basilicata. « Nuova Enciclopedia agr. ital. », p. III; *Il terreno*, pp. 204-209. Torino, U.T.E.T., 1898.

Guida geologica dei dintorni di Lagonegro in Basilicata. « Boll. Soc. geol. it. », vol. XVII, pp. 170-195, 1 carta geol. 1:50.000. Roma, 1898.

I grandi laghi pleistocenici delle falde del Vulture. « Rend. Acc. Lincei », Cl. Sc. fis., s. 5ª, vol. VII, 2° sem., pp. 326-330, fig. 1. Roma, 1898.

Ancora del Vesuvio ai tempi di Strabone. « Boll. Soc. geol. it. », vol. XVII, pp. 257-260. Roma, 1898.

Il buddismo in Europa. « Flegrea », anno I, vol. 1°, n. 3 (5 marzo 1899), pp. 292-298. Napoli, 1899.

La via della verità. « Flegrea », anno I, vol. 3°, n. 6 (20 ottobre 1899), pp. 545-551. Napoli, 1899.

Studio geologico del Monte Vulture. « Atti Acc. Sc. fis. e mat. », s. 2ª, vol. X, n. 1, pp. 1-208, tavv. 9, figg. 20. Napoli, 1899.

Escursioni sottomarine nel golfo di Napoli. « Nuova antol. », vol. CLXVII, fasc. 667, pp. 500-507. Roma, 1° ottobre 1899.

Una probabile copia pompeiana del ritratto di Alessandro magno. « Flegrea », anno II, vol. 1°, n. 6 (20 marzo 1900), pp. 524-529, fig. 1. Napoli, 1900.

La magia nel Buddismo. « Flegrea », anno II, vol. 2°, fasc. 4 (20 maggio 1900), pp. 355-370. Napoli, 1900.

Sulla probabile causa dell'attuale aumentata attività del Vesuvio. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 3ª, vol. VI, pp. 127-130. Napoli, 1900.

Il cratere di Vivara nelle isole Flegree. « Atti Acc. Sc. fis. e mat. », s. 2ª, vol. X, n. 8, pp. 1-60, tavv. 3, figg. 6. Napoli, 1900 (in collaborazione con C. Riva).

Influenza dell'acqua atmosferica sull'attività del Vesuvio. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 3ª, vol. VI, pp. 217-223. Napoli, 1900.

La pioggia e il Vesuvio. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 3ª, vol. VII, pp. 125-127. Napoli, 1901.

Considerazioni sull'origine superficiale dei vulcani. « Atti Acc. Sc fis. e mat. », s. 2ª, vol. XI, n. 7, pp. 1-19, figg. 2, tav. 1. Napoli, 1901.

Significato geologico di alcuni miti ariani. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 3ª, vol. VII, pp. 227-238. Napoli, 1901.

Un discorso di Gotamo Buddo tradotto per la prima volta dal testo pâli. « Flegrea », anno III, vol. 1°, fasc. 3 (5 febbraio 1901), pp. 193-204. Napoli, 1901 (in collaborazione con K. E. Neumann).

Paragoni geologici nella Bibbia e nel Buddismo. « Flegrea », anno III, vol. 2°, fasc. 5 (5 giugno 1901), pp. 394-412. Napoli, 1901.

Sonetti di Shakespeare (trad.). « Flegrea », anno III, vol. 3°, fasc. 3 (5 agosto 1901), pp. 239-241. Napoli, 1901.

Un paragone fra il Vesuvio e il Vulture. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 3ª, vol. VII, pp. 315-320, figg. 2. Napoli, 1901.

I vulcani di Napoli. « Nuova antol. », anno XXXVII, fasc. 728, pp. 684-695. Roma, 16 aprile 1902.

Il cratere di Astroni nei Campi Flegrei. « Atti Acc. Sc. fis. e mat. », s. 2ª, vol. XI, n. 8, pp. 1-33, figg. 12, tavv. 7. Napoli, 1902 (in collaborazione con C. Riva).

Carlo Riva. Ricordi. Napoli, 1902. Op. in 4°, pp. 91. Con ritr. e bibl.

Buddhist ideas in Shakespeare. « Buddhism », vol. I, n. 1, pp. 54-58. Rangoon, settembre 1903.

History of volcanic action in the Phlegraean Fields. « Quart. Journ. Geol. Soc. », vol. LX, pp. 296-315, tavv. XXVI-XXVIII. London, 1904.

La patria e la tomba di Buddha. « Il Mattino illustrato », anno II, n. 17, pp. 14-15, figg. 6. Napoli, 24 aprile 1904.

Geologia e geografia fisica dell'Italia meridionale. Bari, Laterza, 1904. Vol. in 16°. pp. 241, figg. 70.

India e Buddhismo antico. Vol. in 8°. Bari, Laterza, 1904-1926: 1ª ed., 1904, pp. 229; 2ª ed., 1911, pp. 489; 3ª ed., 1917, pp. 516; 4ª ed., 1920, pp. 422; 5ª ed., 1926, pp. 548.

L'attività vulcanica nei Campi Flegrei. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 3ª, vol. X, pp. 203-221. Napoli, 1904.

Lo scoglio di Revigliano. « Atti Acc. Sc. fis. e mat. », s. 2ª, vol. XII, n. 12, pp. 1-4, tavv. 2. Napoli, 1905.

I crateri di Miseno nei Campi Flegrei. « Atti Acc. Sc. fis. e mat. », s. 2ª, vol. XIII, n. 1, pp. 1-25, tavv. 3. Napoli, 1905.

Visioni geologiche nell'arte. « Nuova antol. », anno XL, fasc. 804, pp. 653-662. Roma, 16 giugno 1905.

Giappone e Buddhismo. « Nuova antol. », anno XL, fasc. 810, pp. 268-276. Roma, 16 settembre 1905.

Vulcani e terremoti. « Nuova antol. », anno XL, fasc. 811, pp. 383-393, figg. 2. Roma, 1° ottobre 1905.

La recente eruzione. « Il Vesuvio illustrato », numero unico, p. 3. Napoli, 1906.

L'eruzione del Vesuvio dell'aprile 1906. « Nuova antol. », anno XLI, fasc. 824, pp. 691-698. Roma, 16 aprile 1906.

The eruption of Vesuvius in april 1906. « Quart. Journ. Geol. Soc. », vol. LXII, pp. 476-483, figg. 3. London, 1906.

The eruption of Vesuvius in april 1906. « Proceed. Geol. Soc. », 1905-1906, n. 829, pp. 100-101. London, 1906.

L'éruption du Vésuve et les volcans. « Revue du mois », anno I, vol. 2°, n. 10, pp. 385-397. Paris, 1906.

Le basi dei vulcani Vulture ed Etna. « Comptes rend. X Congrès géol. internat. », p. 2ª, pp. 979-984, tav. 1. Mexico, 1906.

Venosa e la regione del Vulture (*La terra d'Orazio*). « Italia artist. », n. 24. Bergamo, 1906. Vol. in 8°, pp. 116, figg. 120, tav. 1.

L'Etna. « Italia artist. », n. 36, 1ª ediz. Bergamo, 1907. Vol. in 8°, pp. 154, figg. 150, tavv. 3. — 2ª ediz. Bergamo, 1928. Vol. in 8°, pp. 146, figg. 184, tavv. 3.

Guardando da Potenza. « Il Lucano », numero unico pel I Centenario del Capoluogo della Basilicata, 1807-1907, pp. 5-6. Potenza, 1907.

Il neck subetneo di Motta S. Anastasia. « Rend. Acc. Lincei », Cl. Sc. fis., s. 5ª, vol. XVI, 2° sem., pp. 15-25, figg. 3. Roma, 1907.

Azzurrite e malachite dei dintorni di Lagonegro in Basilicata. « Rend. Acc. Lincei », Cl. Sc. fis., s. 5ª, vol. XVI, 2° sem., pp. 328-332, fig. 1. Roma, 1907.

Il cratere di Nisida nei Campi Flegrei. « Atti Acc. Sc. fis. e mat. », s. 2ª, vol. XIII, n. 10, pp. 1-14, tavv. 2. Napoli, 1907.

L'isola di Capri. « Rend. Acc. Lincei », Cl. Sc. fis., s. 5ª, vol. XIV, sem. 1°, pp. 853-857, figg. 2. Roma, 1907.

Terra madre. Torino, Bocca, 1907. Vol. in 16°, pp. 219.

Una monografia dei Campi Flegrei. « Riv. geogr. it. », vol. XV, pp. 170-176. Firenze, 1908.

Le rughe della terra. « Nuova antol. », anno XLIII, fasc. 869, pp. 35-46. Roma, 1° marzo 1908.

Raffaele Vittorio Matteucci. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 3ª, vol. XV, pp. 218-222, bibl. Napoli, 1909.

Il seppellimento di Ercolano. « Nuova antol. », anno XLIV, pp. 44-53. Roma, 1° ottobre 1909.

I Campi Flegrei. « Italia artist », n. 52. Bergamo, 1909. Vol. in 8°, pp. 156, figg. 147, tavv. 5.

Come cresce il Vesuvio. « Natura », vol. I, pp. 33-40, figg. 7. Milano, 1909.

I terremoti. Cause ed effetti. « Corriere della sera », anno 34, n. 48. Milano, 17 febbraio 1909.

Die Erdbeben Süd-Italiens. « Süddeutsche Monatshefte », anno VI, fasc. 4°, pp. 485-497. München, aprile 1909.

La libertà di coscienza e di scienza. « Corriere della sera », anno 34, n. 114. Milano, 25 aprile 1909.

I ghiacci della terra ed i loro esploratori. « Corriere della sera », anno 34, n. 165. Milano, 16 giugno 1909.

Marte e l'avvenire della terra. « Corriere della sera », anno 34, n. 193. Milano, 14 luglio 1909.

Gli uomini sulla terra inaridita. « Corriere della sera », anno 34, n. 202. Milano, 23 luglio 1909.

Le origini della vita sulla terra. « Corriere della sera », anno 34, n. 230. Milano, 20 agosto 1909.

L'impronta dell'uomo sulla terra. « Corriere della sera », anno 34, n. 248. Milano, 7 settembre 1909.

I ghiacci dei poli. « Corriere della sera », anno 34, n. 255. Milano, 14 settembre 1909.

Le ceneri di Buddho. « Il Marzocco », anno XIV, n. 43, pag. 2. Firenze, 24 ottobre 1909.

Sull'acropoli di Cuma. « Corriere della sera », anno 34, n. 299. Milano, 29 ottobre 1909.

La foglia gialla. « Corriere della sera », anno 34, n. 309. Milano, 8 novembre 1909.

L'uomo solo. « Corriere della sera », anno 34, n. 340. Milano, 9 dicembre 1909.

L'aurora. « Corriere della sera », anno 34, n. 360. Milano, 30 dicembre 1909. — Trad. franc.: *L'aurore.* « La Coopération des idées », s. 6ª, anno XVII, n. 4, pp. 271-282. Paris, 16 febbraio 1912.

Conseguenze arrecate alle campagne e alle culture agrarie dalla eruzione vesuviana dell'aprile 1906. « Atti Ist. Incoragg. », s. 6ª, vol. LX (1908), pp. 299-315. Napoli, 1909 (in collaborazione con O. Comes, G. Froio, F. Bassani, F. De Rosa e O. Bordiga).

Contributo del R. Istituto di Incoraggiamento di Napoli alla ricerca delle norme edilizie per le regioni sismiche. « Atti Ist. Incoragg. », s. 6ª, vol. LXI (1909), pp. III-XXV, tavv. 7. Napoli, 1910 (in collaborazione con F. Bassani, U. Masoni, G. Mercalli, F. Nitti, G. Pepe).

Costituzione geologica e configurazione geografica della Basilicata e della Calabria. Nell'opera: « Inchiesta parlamentare sulle condizioni dei contadini nelle province meridionali e nella Sicilia », vol. V. Basilicata e Calabria, tomo III, pp. 1-6, con figg. Roma, 1910.

Il cratere di Astroni. In « Astroni », a cura del Comitato VIII Congresso Zool. Naz. Napoli, 1910. Op. in 16°, pp. 39; vedi pp. 7-29, figg. 7, tav. 1.

Il giorno. « Corriere della sera », anno 35, n. 20. Milano, 20 gennaio 1910. — Trad. franc.: *Le jour.* « La Coopération des idées », s. 6ª, anno XVII, n. 5, pp. 321-332. Paris, 1° marzo 1912.

Il crepuscolo. « Corriere della sera », anno 35, n. 55. Milano, 24 febbraio 1910. — Trad. franc.: *Le crépuscule.* « La Coopération des idées », s. 6ª, anno XVII, n. 6, pp. 432-443. Paris, 16 marzo 1912.

La notte. « Corriere della sera », anno 35, n. 90. Milano, 1° aprile 1910. — Trad. franc.: *La nuit.* « La Coopération des idées », s. 6ª, anno XVII, n. 7, pp. 55-65. Paris, 1° aprile 1912.

L'aurora. Il giorno. Il crepuscolo. La notte. Napoli, G. De Georgio, 1910. Op. in 8°, pp. 46, figg. 4.

Le mosche. « Corriere della sera », anno 35, n. 100. Milano, 11 aprile 1910. — Trad. franc.: *Les mouches.* « Le penseur », anno X, n. 8, pp. 298-306. Paris, agosto 1910.

I progenitori. « Corriere della sera », anno 35, n. 165. Milano, 16 giugno 1910.

Arte buddhista. « Nuova antol. », anno XLV, fasc. 925, pp. 29-36. Roma, 1° luglio 1910.
Nife-sima-sal. « Corriere della sera », anno 35, n. 201. Milano, 22 luglio 1910.
Il risveglio. « Corriere della sera », anno 35, n. 251. Milano, 10 settembre 1910.
Il golfo. « Corriere della sera », anno 35, n. 274. Milano, 3 ottobre 1910.
L'estinzione. « Corriere della sera », anno 35, n. 320. Milano, 18 novembre 1910.
La vittoria. « Corriere della sera », anno 35, n. 330. Milano, 28 novembre 1910.
Il focolare. « Corriere della sera », anno 35, n. 361. Milano, 30 dicembre 1910.
Achille. « Corriere della sera », anno 36, n. 16. Milano, 16 gennaio 1911.
La Pietà. « Corriere della sera », anno 36, n. 50. Milano, 19 febbraio 1911.
La lotta. « Corriere della sera », anno 36, n. 65. Milano, 6 marzo 1911.
I venti. « Corriere della sera », anno 36, n. 105. Milano, 15 aprile 1911.
L'elefante. « Corriere della sera », anno 36, n. 135. Milano, 17 maggio 1911.
Gli ultimi giorni di Gotamo Buddho. « Il Marzocco », anno XVI, n. 34, pp. 1-2. Firenze, 20 agosto 1911.
L'eroe. « Il Marzocco », anno XVI, n. 40, p. 3. Firenze, 1° ottobre 1911.
La guerra. « Il Marzocco », anno XVI, n. 49, p. 1. Firenze, 3 dicembre 1911.
Caverna con avanzi preistorici presso Lagonegro in Basilicata. « Rend. Acc. Lincei », Cl. Sc. fis., s. 5ª, vol. XX, 2° sem., pp. 445-448, fig. 1. Roma, 1911.
Sull'età degli scisti cristallini della valle del Sinni. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 3ª, vol. XVIII, pp. 197-200. Napoli, 1912.
La parola dello Svegliato. « Il Marzocco », anno XVII, n. 44, pp. 1-2. Firenze, 3 novembre 1912.
Dante e Petrarca nel giudizio di Schopenhauer. « Il Marzocco », anno XVII, n. 52, p. 2. Firenze, 29 dicembre 1912.
La terra e l'uomo. I ediz. Napoli, Ricciardi, 1912. Vol. in 16°, pp. XII+342. — II ediz. Bologna, Zanichelli, 1919. Vol. in 8°, pp. 602. — III ediz. Bologna, Zanichelli, 1920. Vol. in 8°, pp. 602. — IV e V ediz. Roma, Faro, 1946 e 1947. Vol. in 8°, pp. 390.
Die beiden Buddhas. « Berliner Tageblatt », anno 42, n. 95, p. 1. Berlin, 21 febbraio 1913.
La spica di Metaponto. « Il Marzocco », anno XVIII, n. 11, p. 1. Firenze, 16 marzo 1913.
Dante e l'India. « Il Marzocco », anno XVIII, n. 16, p. 1. Firenze, 20 aprile 1913.
« *Alcesti* » *in Giappone.* « Il Marzocco », anno XVIII, n. 21, p. 1. Firenze, 25 maggio 1913.
Letteratura guerresca giapponese: Niku-dan. « Il Marzocco », anno XVIII, n. 25, pp. 1-2. Firenze, 22 giugno 1913.
Il passero di Lesbia. « Il Marzocco », anno XVIII, n. 27, p. 1. Firenze, 6 luglio 1913.
Voci del dolore del mondo. « Il Marzocco », anno XVIII, n. 33, p. 1. Firenze, 17 agosto 1913.
Scienza e civiltà. « Il Marzocco », anno XIX, n. 50, p. 1. Firenze, 13 dicembre 1914.
I crateri di Fossa Lupara nei Campi Flegrei. « Atti Acc. Sc. fis. e mat. », s. 2ª, vol. XVI, n. 5, pp. 1-27, figg. 4, tavv. 4. Napoli, 1915. — Sunto in: « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 3ª, vol. XX, p. 248. Napoli, 1914 (in collaborazione con H. Simotomai Tanakadate).
I crateri del Monte Gauro nei Campi Flegrei. « Atti Acc. Sc. fis. e mat. », s. 2ª, vol. XVI, n. 10, pp. 1-51, figg. 10, tavv. 3. Napoli, 1915 (in collaborazione con H. Simotomai Tanakadate).
India e Britannia. « Il Marzocco », anno XX, n. 6, p. 1. Firenze, 7 febbraio 1915.
Da S. Francesco a Buddho. « Nuova antol. », anno L, fasc. 1038, pp. 522-528. Roma, 16 aprile 1915.
Per la civiltà. « Il Marzocco », anno XX, n. 22, pp. 1-2. Firenze, 30 maggio 1915.
La parola del taciturno. « Il Messaggero », anno XXXVII, n. 214, p. 1. Roma, 3 agosto 1915.

Latin sangue gentile. « Il Marzocco », anno XX, n. 47, p. 1. Firenze, 21 novembre 1915.
Poesia indo-inglese. « Il Marzocco », anno XXI, n. 2, p. 1. Firenze, 9 gennaio 1916.
Itala forza. « Il Marzocco », anno XXI, n. 8, p. 1. Firenze, 20 febbraio 1916.
Norma. « Il Marzocco », anno XXI, n. 11, pp. 1-2. Firenze, 12 marzo 1916.
Shakespeare e l'Italia. « Il Marzocco », anno XXI, n. 17, p. 2. Firenze, 23 aprile 1916.
Francesco Bassani. Commemorazione. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 3ª, vol. XXII, pp. 69-88, bibl. Napoli, 1916.
Italae vires. Napoli, Ricciardi, 1916. Vol. in 16°, pp. XII+206.
Studio geografico-fisico del lago artificiale di Muro Lucano. « Atti Ist. Incoragg. », s. 6ª, vol. LXVIII (1916), pp. 207-240, tavv. 6, figg. 7. Napoli, 1917 (in collaborazione con H. Simotomai Tanakadate).
Relazione sul concorso a premio bandito dal R. Istituto di Incoraggiamento di Napoli sul tema: Ricerche scientifiche e pratiche sui petroli dell'Italia meridionale continentale. « Atti Ist. Incoragg. », s. 6ª, vol. LXVIII (1916), pp. 479-481. Napoli, 1917.
Schopenhauer e l'Italia. « Il Marzocco », anno XXII, n. 2, p. 1. Firenze, 14 gennaio 1917.
Per Schopenhauer. « Il Marzocco », anno XXII, n. 5, p. 4. Firenze, 4 febbraio 1917.
Gloria d'Italia. « Il Marzocco », anno XXII, n. 17, pp. 1-2. Firenze, 29 aprile 1917.
La lupa di Roma. « Il Marzocco », anno XXIV, n. 2, p. 1. Firenze, 12 gennaio 1919.
Leonardo e l'India. Nel vol.: « Ist. di Studi Vinciani in Roma. Per il IV Centenario della morte di Leonardo da Vinci », pp. 33-38. Bergamo, Istit. it. d'arti graf., 1919.
Il pessimismo di Leonardo e Michelangelo. « Rivista d'It. », anno XXII, fasc. 4°, pp. 389-393. Roma, 30 aprile 1919. — Trad. franc.: *Le pessimisme de Léonard et Michelange.* Nel vol.: « Léonard de Vinci 1519-1919 », pp. 205-212. Rome, Nouvelle Revue d'Italie, 1919.
Morale buddhista. Bologna, Zanichelli, 1920 Op. in 8°, pp. 64.
Leonardo da Vinci e la geologia. Bologna, Zanichelli, 1920. Vol. in 8°, pp. 197. — Un brano della parte seconda (pp. 96-109) è ristampato nel vol. di S. Timpanaro: « Leonardo. Pagine di scienza ». Milano, Mondadori, 1926, come capitolo distinto, sotto il titolo: *I fossili secondo Leonardo* (pp. 387-408).
Shakespeare e il dolore del mondo. Bologna, Zanichelli, 1921. Vol. in 8°, pp. 408.
Lord Byron. Caino. Firenze, Sansoni, 1922. Vol. in 16°, pp. 200, con introduzione e note di G. De Lorenzo, traduzione di Ferdinando Milone.
Il glaciale dei dintorni di Lagonegro in Basilicata. « Atti Acc. Sc. fis. e mat. », s. 2ª, vol. XVII, n. 1, pp. 1-15, tavv. 5, fig. 1. Napoli, 1923 (in collaborazione con G. Dainelli).
Gerarchie in India. « Gerarchia », anno II, n. 2, pp. 742-745. Milano, 1923.
L'apologo di Menenio Agrippa. « Gerarchia », anno II, n. 4, pp. 881-885. Milano, 1923.
Paura e presunzione. « Gerarchia », anno II, n. 8, pp. 1159-1164. Milano, 1923.
Il passo di Roma. « Gerarchia », anno II, n. 11, pp. 1324-1329. Milano, 1923.
Leopardi e Schopenhauer. Napoli, Ricciardi, 1923. Op. in 16°, pp. 54.
Geografia generale e geologia. Napoli, Perrella, 1924-30 (varie edizioni, con figg. e tavv.). Vol. in 8° (in collaborazione con R. Almagià).
India superba. « Il secolo XX », anno XXIII, n. 2, pp. 85-92, figg. 22. Milano, febbraio 1924.
Il sole del Gange. « Gerarchia », anno III, n. 11, pp. 663-670. Milano, 1924.
Mario Cermenati. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 3ª, vol. XXX, pp. 198-200. Napoli, 1924.
Archibald Geikie. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 3ª, vol. XXX, pp. 206-209. Napoli, 1924.
Litantrace nel mesozoico di Lagonegro in Basilicata. « Rend. Acc. Lincei », Cl. Sc. fis., s. 5ª, vol. XXXIII, 2° sem., pp. 21-25. Roma, 1924.

L'ideale imperatorio. « Gerarchia », anno IV, n. 7, pp. 416-427. Milano, 1925.

Asoko. « Gerarchia », anno IV, n. 9, pp. 566-578. Milano, 1925.

Prefazione al Taccuino 1822-24, Viaggio in Italia, di A. Schopenhauer, tradotto da Gina Gabrielli. Napoli, Ricciardi, 1925. Vol. in 16°, pp. XVI+130 (vedi pp. VII-XV).

Il sole del Gange. Bologna, Zanichelli, 1925. Vol. in 8°, pp. 229.

Il canto del ladro d'amore (Traduzione dal sanscrito, con introd. e note). Napoli, Ricciardi, 1925. Vol. in 16°, pp. 126, figg. 3.

Asoko. Napoli, Ricciardi, 1926. Vol. in 16°, pp. 93.

L'Elephas antiquus di Pignataro Interamna in Valle del Liri. « Rend. Acc. Lincei », Cl. Sc. fis., s. 6ª, vol. IV, pp. 185-188, fig. 1. Roma, 1926.

L'Elephas antiquus nell'Italia meridionale. « Atti Acc. Sc. fis. e mat. », s. 2ª, vol. XVII, n. 11, pp. 1-105, tavv. 10, figg. 21, bibl. Napoli, 1927. — Sunto in: « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 3ª, vol. XXXII, p. 125. Napoli, 1926 (in collaborazione con G. D'Erasmo).

Discorsi di Gotamo Buddho del Majjhimanikâyo, per la prima volta tradotti dal testo pâli. Bari, Laterza, 1907-1927: I vol. (3 ediz., del 1907, del 1917, del 1927); II vol., 1925; III vol., 1927. L'ediz. completa (1921-1927) risulta di pp. XVI+511, XXVII+547, XVI+442 (in collaborazione con K. E. Neumann).

Lo scalpellino. « Gerarchia », anno VII, n. 5, pp. 339-346. Milano, 1927.

L'astronomo-poeta-pensatore. « Gerarchia », anno IX, n. 1, pp. 34-42. Milano, 1929.

L'Italia di Byron. « Gerarchia », anno IX, n. 5, pp. 374-384. Milano, 1929.

La scalata all'Antartide. « Gerarchia », anno IX, n. 12, pp. 1022-1031. Milano, 1929.

Traduzione dell'opera di A. Schopenhauer: *Il mondo come volontà e rappresentazione.* Bari, Laterza, 1928-1930. Voll. 2 in 8°, pp. XXXII+663 e 791 (in collaborazione, per il 1° vol., con P. Savi - Lopez).

Nuove osservazioni sull'Elephas antiquus dell'Italia meridionale. « Atti Acc. Sc. fis. e mat. », s. 2ª, vol. XVIII, n. 5, pp. 1-15, figg. 12. Napoli, 1930 (in collaborazione con G. D'Erasmo).

India e Inghilterra. « Gerarchia », anno X, n. 5, pp. 370-377. Milano, 1930.

Il terremoto. « Gerarchia », anno X, n. 8, pp. 636-653. Milano, 1930.

Sulla causa geologica della scomparsa dell'antica città di Paestum. « Rend. Acc. Lincei », Cl. Sc. fis., s. 6ª, vol. XI, pp. 1062-1065, fig. 1. Roma, 1930.

L'eroe del pensiero italiano. « Gerarchia », anno XI, n. 11, pp. 886-905. Milano, 1931.

Oriente ed Occidente. Bari, Laterza, 1931. Vol. in 8°, pp. 263.

Il Vesuvio. « Italia artist. », n. 110. Bergamo, 1931. Vol. in 8°, pp. 131, figg. 132, tavv. 2.

Ancora sull'Elephas antiquus di Pignataro Interamna. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 4ª, vol. I, pp. 16-19. Napoli, 1931 (in collaborazione con G. D'Erasmo).

Asia ed Europa. « Gerarchia », anno XI, n. 5, pp. 359-381. Milano, 1931.

Goethe scienziato. « L'avvisatore librario settim. », anno V, n. 14, pp. 313-314, fig. 1. Bologna, 1932.

Roma e Goethe. « Gerarchia », anno XII, n. 3, pp. 190-200. Milano, 1932.

Civiltà sommerse. « Gerarchia », anno XII, n. 9, pp. 767-780. Milano, 1932.

L'uomo paleolitico e l'Elephas antiquus nella valle del Liri. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 4ª, vol. II, pp. 40-44. Napoli, 1932 (in collaborazione con G. D'Erasmo).

Campi Flegrei. « Encicl. ital. », vol. XV, pp. 542-545, figg. 5, tavv. 2, bibl. Roma, 1932.

Gerarchia in Shakespeare. « Gerarchia », anno XII, n. 12, pp. 1084-1089. Milano, 1932.

Giordano Bruno, l'eroe del pensiero italiano. Napoli, Ricciardi, 1932. Op. in 8°, pp. 51.

L'uomo paleolitico e l'Elephas antiquus nell'Italia meridionale. « Atti Acc. Sc. fis. e mat. », s. 2ª, vol. XIX, n. 5, pp. 1-107, figg. 42, tavv. 9. Napoli, 1933. — Sunto in: « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 4ª, vol. II, p. 133. Napoli, 1932 (in collaborazione con G. D'Erasmo).

Utopie del passato e del futuro. « Gerarchia », anno XIV, n. 1, pp. 17-26. Milano, 1934.

Ferruccio Zambonini. Nel volume: « Ferruccio Zambonini. In memoriam », pp. 28-29. Napoli, 1934.

Avanzi di ippopotamo nell'Italia meridionale. « Atti Acc. Sc. fis. e mat. », s. 2ª, vol. XX, n. 15, pp. 1-18, figg. 6, tavv. 2, bibl. Napoli, 1935 (in collaborazione con G. D'ERASMO).

Campania. « Attraverso l'Italia », vol. VII, pp. 7-14. Milano, Touring Club Ital., 1936.

I grandi campani. « Le vie d'Italia », vol. XLII, pp. 237-243, figg. 15. Milano, 1936.

Molluschi geologi. « Le vie d'Italia », vol. XLII, pp. 360-364, con figg. Milano, 1936.

Il sentimento della natura in Leopardi. Napoli, Ricciardi, 1937. Op. in 8°, pp. 34. — « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 4ª, vol. VII, pp. 73-93. Napoli, 1937.

Geologia dell'Italia meridionale. Nuova ediz. a cura di G. D'ERASMO. Napoli, Edit. Politecnica, 1937. Vol. in 8°, pp. 326, figg. 143, bibl.

Lucania. « Attraverso l'Italia », vol. VIII: Puglia, Lucania, Calabria, pp. 115-120. Milano, Touring Club Ital., 1937.

Come io divenni seguace di Schopenhauer e di Buddha. « XXV Jahrb. der Schopenhauer Gesells. », pp. 61-65. Heidelberg, 1938.

Adolfo Hitler, Schopenhauer e Wagner. « Corriere di Napoli », anno LX, n. 100, p. 3. Napoli, 28 aprile 1938.

Leonardo geologo. « Sapere », n. 95, pp. 401-403, figg. 3. Milano, 15 dicembre 1938. — Ripubblic. in « Sapere », fasc. fuori serie, pp. 35-37, figg. 3. Milano, 15 aprile 1952.

Avanzi di elefante e di ippopotamo nella valle del Sele. « Atti Acc. Sc. fis. e mat. », s. 3ª, vol. I, n. 4, pp. 1-11, tav. 1, figg. 14. Napoli, 1938. — « Rassegna Stor. Salernit. », anno II, n. 2, pp. 203-220, figg. 14. Salerno, 1938 (in collaborazione con G. D'ERASMO).

Geologia e geografia fisica di Leonardo da Vinci. « Annali Lav. pubbl. », vol. LXXVII, fasc. 3, pp. 233-263, figg. 2. Roma, 1939.

La geologia nell'antichità. Nel vol.: « Studi di antichità classica, offerti da colleghi e discepoli a Emanuele Ciaceri ». Città di Castello, Soc. Ed. Dante Alighieri, 1940. Op. in 8°, pp. 18.

Il cratere del Monte Nuovo disegnato da Francisco de Hollanda nel febbraio del 1540. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 4ª, vol. XII, pp. 259-262, tav. 1. Napoli, 1942.

Le acque freatiche dei deserti conosciute ed utilizzate nell'antica India. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 4ª, vol. XII, pp. 324-327. Napoli, 1942.

Vittorio Spinazzola. « Il Mattino », anno 52, n. 191, p. 2. Napoli, 11 agosto 1943.

Shakespeare e Napoleone. Un paragone. Napoli, Genovese, 1944. Op. in 16°, pp. 30.

Il padre della Campania. « Risorgimento ». Napoli, 25 marzo 1944. — Ristamp. in « Annali Osserv. Vesuv. », s. 5ª, vol. unico, pp. 163-167. Napoli, 1949.

Lo scritto di Kant su La fine di tutte le cose. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 4ª, vol. XIII (ottobre 1942 - dicembre 1945), pp. 183-197. Napoli, 1945.

Il Sallasutta del Suttanipâta. « Rend. Acc. Lincei », Cl. Sc. mor., s. 8ª, vol. I, pp. 419-424. Roma, 1946.

Elementi di geografia fisica. Napoli, Morano, 1946. Vol. in 8°, pp. 342, figg. 40, bibl. (in collaborazione con G. D'ERASMO).

Divagazioni sul « Sogno di una notte di mezza estate » di Shakespeare. « Rend. Acc. Lincei », Cl. Sc. mor., s. 8ª, vol. II, pp. 545-554. Roma, 1947.

Influsso di Galileo e di Kepler su Hobbes e Kant. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 4ª, vol. XIV, pp. 182-186. Napoli, 1948.

Religioni e filosofie dell'Estremo Oriente. Napoli, Libr. scient. editr., 1948. Vol. in 8°. pp. 195.

Gli ultimi giorni di Gotamo Buddho. Bari, Laterza, 1948. Vol. in 8°, pp. 100.

Divagazioni sul Don Quijote de la Mancha. « Atti Acc. Pontan. », n. s., vol. I (1947-48), pp. 45-50. Napoli, 1949.

Per la morte del Mahâtma Gandhi. « Atti Acc. Pontan. », n. s., vol. I (1947-48), pp. 51-54. Napoli, 1949.

In memoria di Leopoldo Pilla. « Atti Acc. Pontan. », n. s., vol. I (1947-48), pp. 89-91. Napoli, 1949.

Tre poeti cantori di vino e d'amore. « Atti Acc. Pontan. », n. s., vol. I (1947-48), pp. 161-179. Napoli, 1949.

Grandi orme. Napoli, Giannini, 1949. Vol. in 8°, pp. 273.

Le balene di Melvillé. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 4ª, vol. XVI, pp. 134-148. Napoli, 1949.

Le teorie di Einstein. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 4ª, vol. XVII, pp. 16-34. Napoli, 1950.

Le mosche in descrizioni antiche e moderne. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 4ª, vol. XVII, pp. 219-229. Napoli, 1950.

L'India nelle lettere di Pietro Della Valle. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 4ª, vol. XVII, pp. 239-258. Napoli, 1950. — Traduz. inglese: *Pietro Della Valle letters on India* « East and West », anno II, n. 4, pp. 205-217. Roma, 1952; anno VII, n. 3, pp. 205-217. Roma, 1956.

Stefan Zweig ed il buddhismo. « Atti Acc. Pontan. », n. s., vol. II (1948-49), pp. 51-56. Napoli, 1950.

Monte Cassino. « Atti Acc. Pontan. », n. s., vol. II (1948-49), pp. 125-129. Napoli, 1950.

I « Contes drôlatiques » e le « Mille e una notte ». « Atti Acc. Pontan. », n. s., vol. II (1948-49), pp. 197-211. Napoli, 1950.

Concezioni del mondo antiche e moderne. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 4ª, vol. XVIII, pp. 168-179. Napoli, 1951.

Le rondini in Shakespeare. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 4ª, vol. XVIII, pp. 198-209. Napoli, 1951.

Tigri antropofaghe. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 4ª, vol. XVIII, pp. 210-218. Napoli, 1951.

Ancora le Rondini di Shakespeare. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 4ª, vol. XVIII, pp. 233-234. Napoli, 1951.

La « Derelitta » del Botticelli. « Atti Acc. Pontan. », n. s., vol. III (1949-50), pp. 33-39, tav. 1. Napoli, 1951.

Traduzione de « L'opera d'arte buddhistica » di K. E. Neumann. Napoli, Libr. Scient. Editr., 1951. Op. in 16°, pp. 83.

La « Pietà » di Palestrina di Michelangelo. « Atti Acc. Pontan. », n. s., vol. III (1949-50), pp. 127-130, tav. 1. Napoli, 1951.

Instabilità ed inentità del mondo. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 4ª, vol. XIX, pp. 10-28. Napoli, 1952. — Trad. inglese: *Instability and non-Entity of the World.* « East and West », vol. III, n. 4, pp. 205-213; vol. IV, n. 1, pp. 24-29. Roma, 1952.

Concezioni cosmiche di Leopardi. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 4ª, vol. XIX, pp. 179-190. Napoli, 1952.

Scienza d' Occidente e sapienza d' Oriente. Napoli, Ricciardi, 1953. Vol. in 8°, pp. VIII+269.

Scienza d'Occidente e sapienza d'Oriente. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 4ª, vol. XX, pp. 11-19. Napoli, 1953.

Kant e la geografia fisica. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 4ª, vol. XX, pp. 79-89. Napoli, 1953.

I vulcani della luna. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 4ª, vol. XX, pp. 165-173. Napoli, 1953.

Sull'intelligenza degli animali. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 4ª, vol. XX, pp. 207-229. Napoli, 1953.

La costituzione geologica dei terreni meridionali. In: Cassa per il Mezzogiorno: Studi e testi, vol. 2º, « Problemi dell'agricoltura meridionale ». Napoli, Ist. Edit. Mezzog., 1953. Vedi: pp. 267-287.

Himâlaya nell'arte e nella scienza. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 4ª, vol. XXI, pp. 31-46. Napoli, 1954. — Traduz. inglese: *The Himâlaya in art and science.* « East and West », anno VIII, n. 2, pp. 136-146. Roma, 1957.

Tempo e spazio nel pensiero di Leopardi. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 4ª, vol. XXI, pp. 150-156. Napoli, 1954.

Divagazioni dantesche. « Atti Acc. Pontan. », n. s., vol. IV (1950-52), pp. 11-28. Napoli, 1954.

Liriche ascetiche. « Atti Acc. Pontan. », n. s., vol. IV (1950-52), pp. 195-207. Napoli, 1954.

Maestri di sapienza e di vita. « Atti Acc. Pontan. », n. s., vol. IV (1950-52), pp. 237-245. Napoli, 1954. — Traduz. inglese: *Masters of Wisdom and of life.* « East and West », vol. IV, n. 2, pp. 67-71. Roma, 1953.

Parabola buddhista. « Atti Acc. Pontan. », n. s., vol. IV (1950-52), pp. 327-333. Napoli, 1954.

Del « frate asino » di San Francesco. « Atti Acc. Pontan. », n. s., vol. V (1952-55), pp. 25-36. Napoli, 1956.

Il Nirvana di Buddha. « Il Mattino », anno LIX, n. 117. Napoli, 26 aprile 1956. — Traduz. inglese: *The Nirvâna of the Buddha.* « East and West », anno VII, n. 4, pp. 306-308, fig. 1. Roma, 1957.

Processi verbali delle adunanze.

Processo verbale dell' adunanza del dì 5 gennaio 1957.

Assistono all' adunanza, presieduta dal presidente Miranda, i soci ordinari residenti Bakunin, Caccioppoli, Colamonico, De Lorenzo, D' Erasmo (segretario), Franchetta, Imbò, Nobile, Pierantoni, Salfi, Scherillo, Spampinato, Tolotti, il socio ordinario non residente Picone e i corrispondenti Beretta e Orrù.

Il Segretario legge il verbale dell' adunanza 1° dicembre, che è approvato. Il Presidente comunica le principali deliberazioni adottate dal Consiglio Generale della Società nella riunione del 31 dicembre, fermandosi soprattutto sulle proposte di modifica allo Statuto sociale che saranno presentate per l' approvazione dei soci nella seduta plenaria delle quattro Classi, fissata per il prossimo 27 gennaio.

Quindi il segretario annunzia che il Department of Mathematics dell' Istituto di Tecnologia di Tokio ha chiesto il cambio del Rendiconto, offrendo i *Kodai Mathematical Seminar Reports.* — L' Accademia acconsente.

Il socio Colamonico presenta ed offre in omaggio il XV volume delle *Memorie di Geografia economica,* che comprende uno studio del prof. Mario Ortolani sulla pianura ferrarese.

Il socio Picone fa omaggio del volume delle sue lezioni *Sopra una teoria delle equazioni integrali lineari*, impartite presso la Scuola Politecnica dell' Università di S. Paolo nel 1954. – Il Presidente, a nome dei soci, ringrazia i donatori.

La Commissione Scherillo, De Lorenzo e D' Erasmo riferisce sulla nota del dott. Renato Sinno dal titolo *Studio geologico e petrografico della zona Pozzuoli - Cigliano - Arco Felice,* proponendone l' accoglimento per la stampa nel Rendiconto.

Uguale proposta d' inserzione nel medesimo periodico fa la Commissione Malquori, D' Erasmo e Scherillo nei riguardi della nota del prof. Riccardo Sersale sopra *Fasi ed habitus cristallino degli alluminati di calcio idrati.* — Con due distinte votazioni l' Accademia accoglie a voti unanimi le due proposte anzidette, con le limitazioni in vigore.

Il socio Spampinato presenta, per il Rendiconto, una sua nota sopra *La* V_8 *di* S_{11} *determinata dalle coniche osculatrici ad una superficie algebrica di* S_3 *prolungata nel campo tripotenziale.*

Processo verbale dell' adunanza del dì 2 febbraio 1957.

Assistono all' adunanza, presieduta dal presidente Miranda, i soci ordinari residenti Colamonico, De Lorenzo, D' Erasmo (segretario), Franchetta, Imbò, Nobile, Pierantoni, Scherillo, Spampinato ed il corrispondente Orrù.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 5 gennaio, che è approvato. Indi presenta l' Annuario 1957 della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti, recentemente distribuito ai Soci, e dà notizia delle principali modifiche allo Statuto del sodalizio, votate a grande maggioranza nell' adunanza plenaria del 27 gennaio e riguardanti l' aumento del numero dei soci corrispondenti, la fissazione del numero e la precisazione delle attribuzioni dei soci emeriti, la maggior durata in carica del segretario generale.

Annunzia altresì che nella stessa tornata generale, in conformità del bando di concorso, il presidente procedette all' apertura della busta contrassegnata dal motto *Mens agitat molem* e che risultò autore della memoria premiata dall' Accademia nel concorso al premio biennale per il 1955-1956 il prof. Marcello La Greca, dell' Istituto Zoologico dell' Università di Napoli.

Il socio Imbò presenta, per il Rendiconto, una nota del dott. William Mansfield Adams, *An improved method of determining direction of faulting in earthquakes*. Il presidente nomina la Commissione costituita dai soci Imbò, Carrelli e D' Erasmo perchè riferisca su questo lavoro in una prossima adunanza.

Processo verbale dell' adunanza del dì 2 marzo 1957.

Sono presenti i soci ordinari residenti Bakunin, Colamonico, De Lorenzo, D' Erasmo, Imbò, Miranda, Pierantoni, Scherillo, Spampinato, il socio ordinario non residente Armellini ed il socio corrispondente Orrù.

Presiede il presidente Miranda, segretario il socio D' Erasmo.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 2 febbraio, che è approvato. Indi presenta il vol. XXIII della serie 4ª del Rendiconto, relativo all' anno 1956, del quale è stata recentemente ultimata la stampa, e comunica i ringraziamenti del prof. Marcello La Greca, vincitore del premio biennale accademico 1955-56.

Il socio Imbò, anche a nome dei colleghi Carrelli e D' Erasmo, legge la relazione sulla nota del dott. William Mansfield Adams, *An improved method of determining direction of faulting in earthquakes*, con la proposta di accoglierla per la stampa nel Rendiconto. — L' Accademia unanime approva.

Il socio Spampinato presenta, per il medesimo periodico, una sua

nota dal titolo *Rappresentazione in* S_{11} *delle reti di sezioni piane di una superficie completa e delle relative curve jacobiane.*

La socia Orrù presenta poi una nota del dott. Oscar Goglia sopra *Gli acidi nucleici nel plasma sanguigno di animali di specie diverse.* — Il Presidente nomina la Commissione Orrù, Pierantoni e Salfi, con l'incarico di riferire su questo lavoro iu una prossima adunanza.

Il socio tesoriere Scherillo presenta il bilancio consuntivo del 1956. Vengono nominati revisori dei conti i soci Catalano e Franchetta.

Processo verbale dell' adunanza del dì 6 aprile 1957.

Presiede il presidente Miranda, essendo presenti i soci ordinari residenti Bakunin, Colamonico, De Lorenzo, D'Erasmo (segretario), Franchetta, Imbò, Nobile, Pierantoni, Salfi, Scherillo ed il corrispondente Orrù.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza del 2 marzo, che è approvato. Indi comunica l' invito della città e della Università di Edinburgh e della Royal Society di London a partecipare al Congresso Internazionale dei Matematici, che avrà luogo a Edinburgh dal 14 al 21 agosto 1958. — Ascoltate le dichiarazioni del Presidente sul probabile intervento dei soci Miranda e Franchetta a quel Congresso, l' Accademia stabilisce di farsi rappresentare da essi.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio, è segnalato un gruppo di lavori dell' Istituto Nazionale per le applicazioni del calcolo, offerto dal consocio Picone.

Il Presidente propone il cambio del Rendiconto col periodico « Ricerche di Matematica a cura dell' Istituto Matematico dell' Università di Napoli ». L' Accademia acconsente.

La socia Orrù, tanto in nome proprio che dei colleghi Pierantoni e Salfi, legge la relazione sulla nota del dott. Oscar Goglia sopra *Gli acidi nucleici nel plasma sanguiguo di animali di specie diverse,* la quale conclude con la proposta, unanime, di accoglimento per la stampa nel Rendiconto. — L' Accademia approva.

Il socio Salfi presenta, per gli Atti, una memoria del prof. Marcello La Greca dal titolo *Morfologia del dermascheletro e segmentazione del capo di Anilocra physodes* (L.) (*Crustacea, Isopoda*). — Poichè si tratta del lavoro che fu giudicato meritevole del premio nel concorso biennale accademico 1955-56, e poichè su di esso ebbe già a pronunziarsi la Commissione Pierantoni, Salfi e Galgano con Relazione inserita nel Rendiconto dello scorso anno 1956, l' Accademia con voto unanime ne approva la stampa nel volume in corso degli Atti, insieme con le figure che l' accompagnano.

Il socio Franchetta, anche a nome del collega Catalano, legge la Re-

lazione dei revisori dei conti sul Bilancio consuntivo 1956, i quali, accertata l'esattezza contabile di esso e la regolarità della documentazione, si dichiarano lieti di proporne l'approvazione. — L'Accademia approva all'unanimità, con un voto di plauso al socio tesoriere Scherillo.

Processo verbale dell'adunanza del dì 4 maggio 1957.

Assistono all'adunanza il presidente Miranda, il segretario D'Erasmo, i soci ordinari residenti Bakunin, Colamonico, De Lorenzo, Diamare, Imbò, Nobile, Salfi, Spampinato, Pierantoni, Scherillo, il socio ordinario non residente Armellini ed i corrispondenti Beretta e Colucci.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 6 aprile, che è approvato. Indi comunica, con profondo dolore, la morte, avvenuta in Torino il 26 dello scorso mese di marzo, del prof. Modesto Panetti, presidente di quell'Accademia delle Scienze e socio corrispondente di quella di Napoli, nella sezione delle Scienze Matematiche, dal dì 25 luglio 1941. Ne ricorda brevemente le numerose benemerenze, sia nel campo didattico — con la lunga carriera, svolta prima presso la Facoltà d'Ingegneria di Genova e successivamente, per quasi un quarantennio, nel Politecnico di Torino — sia nelle indagini scientifiche pure e applicate, principalmente rivolte al settore dell'elasticità e resistenza dei materiali, al campo della dinamica delle macchine, e a quello dell'aerotecnica, a cui legò particolarmente il suo nome, fondando in Torino uno speciale laboratorio con la sezione aerodinamica e con quella per lo studio sperimentale dei motori, ed istituendovi una Scuola di perfezionamento nelle costruzioni aeronautiche. Annunzia che dell'insigne Consocio sarà più degnamente e più ampiamente ricordata la nobile figura in altra adunanza, e si dice sicuro di interpretare l'unanime sentimento dei Colleghi inviando alla venerata memoria di Lui un mesto e reverente saluto.

Il socio Colamonico si associa alle parole del segretario, ricordando che il defunto collega Panetti era, come lui, nativo di Acquaviva delle Fonti e mettendone in rilievo le particolari doti del carattere. Anche il socio Armellini, che lo ebbe collega al Politecnico di Torino, si associa, rievocandone l'elevato ingegno e la grande bontà dell'animo.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio è segnalato il volume sulle onoranze a Mauro Picone, tributategli a Roma nel gennaio dello scorso anno.

Il socio Spampinato presenta una nota del prof. Franco Mazzarella dal titolo *Le equazioni di congruenza in coordinate curvilinee.* Il presidente incarica la Commissione costituita dai soci Spampinato, Miranda e Tolotti di riferire su questo lavoro nella prossima adunanza.

Quindi il presidente annunzia che la Sezione di Scienze Matematiche

nella sua riunione del 4 maggio ha proposto di ricoprire un posto di socio corrispondente. La relativa votazione avrà luogo nell'adunanza ordinaria di giugno.

Processo verbale dell'adunanza del dì 1° giugno 1957.

Presiede il presidente Miranda, essendo presenti i soci ordinari Bakunin, Colamonico, De Lorenzo, D'Erasmo (segretario), Diamare, Franchetta, Giordani, Imbò, Nobile, Pierantoni, Salfi, Scherillo, Spampinato, ed i corrispondenti Beretta, Colucci, Galgano e Montalenti.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 4 maggio, che è approvato. Indi comunica la lettera della Presidenza del Consiglio dei Ministri, che dà notizia dell'avvenuta concessione — sui fondi dell'Ente Nazionale per la Cellulosa e la Carta riservati alle riviste di elevato valore culturale — di un contributo per la stampa del Rendiconto accademico. Partecipa poi la richiesta di cambio con le *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences* di Budapest. L'Accademia acconsente.

Il socio Colamonico presenta il volume, testè pubblicato, che elenca le *Pubblicazioni periodiche esistenti nelle biblioteche pubbliche e negli Istituti universitari di Napoli,* e ne discorre, mettendo in rilievo le difficoltà tecniche e finanziarie che si sono superate per la stampa di esso, e le benemerenze della Sopraintendenza Bibliografica della Campania e della Calabria, dell'Accademia Pontaniana, dell'Università di Napoli e di altri enti locali, che hanno in vario modo contribuito alla buona riuscita del lavoro. Interloquisce il socio Giordani sulla opportunità di pubblicare Supplementi decennali di tale repertorio, con gli opportuni aggiornamenti, ed il Presidente ringrazia il socio Colamonico, alla cui tenace attività è per gran parte dovuta la realizzazione di quest'antico voto degli studiosi meridionali.

La Commissione Spampinato, Miranda e Tolotti riferisce sulla nota del prof. Franco Mazzarella sopra *Le equazioni di congruenza in coordinate curvilinee,* proponendone l'accoglimento per la stampa del Rendiconto. — L'Accademia approva all'unanimità.

Il socio Spampinato presenta una sua nota *Sulla prima curva osculatrice di un ramo superlineare di una curva algebrica piana completa.*

Il socio Franchetta presenta una nota del dott. Mario Curzio dal titolo *Sui gruppi φ-isomorfi ad un gruppo speciale finito.* — Il Presidente incarica la Commissione costituita dai soci Franchetta, Caccioppoli e Miranda di riferire su questo lavoro nella prossima adunanza.

Constatata la validità dell'adunanza a norma dell'art. 11 dello Statuto

sociale, si passa quindi, secondo l'ordine del giorno, alla elezione dei soci per i posti attualmente vacanti.

Il Segretario informa che nell'adunanza di sezione dello scorso 4 maggio, quella di Scienze Matematiche stabilì di presentare all'approvazione della Classe un candidato per la nomina ad uno dei due posti vacanti di socio corrispondente.

Il socio Miranda legge la relazione sui requisiti scientifici del prof. Vincenzo Franciosi, titolare di Scienza delle Costruzioni nell'Università di Napoli, proposto a voti unanimi dalla Sezione a tale posto. Quindi il presidente chiede ai soci ordinari presenti all'adunanza se abbiano da proporre altri nomi. Non essendo state avanzate altre proposte, il candidato è ammesso a votazione a scrutinio segreto, ottenendo quattordici voti favorevoli su quattordici soci ordinari presenti e votanti.

Il presidente proclama pertanto eletto il prof. Vincenzo Franciosi socio corrispondente nella Sezione delle Scienze Matematiche.

Si autorizza il Segretario ad accettare, con le limitazioni in vigore, durante il periodo delle vacanze estive, le note dei soci di ogni categoria, che saranno eventualmente presentate per la stampa nel Rendiconto.

Il presente verbale viene redatto, letto ed approvato seduta stante.

Processo verbale dell'adunanza del dì 16 novembre 1957.

Presiede il presidente Miranda, essendo presenti i soci ordinari residenti Bakunin, Catalano, Colamonico, D'Erasmo (segretario), Franchetta, Giordani, Imbò, Nobile, Pierantoni, Scherillo, Spampinato ed i corrispondenti Franciosi, Galgano ed Orrù.

Il segretario ricorda innanzi tutto le due gravissime perdite subite dall'Accademia durante lo scorso mese di giugno. Il giorno 2 cessava di vivere in Napoli, dopo brevissima malattia, il prof. Gaetano Quagliariello, apprezzatissimo maestro di Chimica biologica, che, pur avendo optato per la Classe di Scienze Mediche e Chirurgiche all'epoca dell'incorporazione di questa nell'antica Società Reale di Napoli, aveva fatto parte della nostra Accademia — prima in qualità di socio corrispondente, e poi come socio ordinario residente — dal marzo 1931 al giugno 1935. — Il successivo giorno 27 chiudeva la sua lunga, nobile, attivissima esistenza il decano dei nostri soci, prof. Giuseppe De Lorenzo, emerito di geologia nell'Università di Napoli, che da più di mezzo secolo apparteneva all'Accademia, alla quale aveva offerto — oltre a numerosi contributi di varia e profonda dottrina, tanto nel campo delle scienze della terra, quanto in quelli, più vasti, della letteratura, della filosofia e dell'arte — non poche prove del suo filiale attaccamento, ricoprendo più volte le cariche di segretario, di presidente di classe e di presidente generale. — Dell'unanime

cordoglio dei consoci l' Ufficio di Presidenza non ha mancato di farsi interprete, a suo tempo, presso le due famiglie; e della vita e dell' opera degli eminenti colleghi rimarrà duraturo ricordo nei Rendiconti delle rispettive Accademie. Una degna commemorazione di Gaetano Quagliariello fu già tenuta, nello scorso luglio dal professore Francesco Cedrangolo, ed un profilo di Giuseppe De Lorenzo verrà tracciato, nel prossimo dicembre, dal socio Geremia D' Erasmo.

Indi il segretario comunica:

1) la lettera 19 giugno 1957 del prof. Vincenzo Franciosi, che ringrazia l' Accademia per la nomina a socio corrispondente nella sezione di Scienze matematiche;

2) l' avvenuta approvazione del nuovo Statuto della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli (Decreto Presidenziale 30 luglio 1957, n. 866) e le principali variazioni da esso apportate alle norme statutarie per l' innanzi vigenti;

3) la riunione 17 ottobre 1957 del Consiglio Generale della Società e le principali deliberazioui in essa adottate;

4) la richiesta di cambio con le pubblicazioni accademiche da parte del Departement de Investigaciones cientificas di Mendoza, che offre i propri *Anales* e la *Revista matematica Cuyana* dal 1955.

L' Accademia prende atto di tutte le precedenti comunicazioni del Segretario, e dà parere favorevole all' invio del proprio Rendiconto al suddetto Istituto.

Richiamandosi alla recente modifica dello Statuto sociale, che ha portato a venticinque il numero dei soci corrispondenti di ciascuna Classe, il presidente propone, e l' Accademia approva, che di essi sedici siano riservati alla Sezione di Scienze Naturali, e nove spettino invece alla Sezione di Scienze Matematiche. Quanto alla categoria dei soci emeriti, per la quale sono fissati tre posti, si decide invece di non procedere, almeno per ora, ad alcuna ripartizione fra le due Sezioni.

Ricordando poi che nella recente adunanza del Consiglio Generale della Società il consocio D' Erasmo è stato eletto Segretario Generale della stessa per il triennio 1958-1960, il presidente si compiace per tale nomina, tanto col collega quanto con l' Accademia. — Il socio D' Erasmo ringrazia.

Fra le opere recentemente pervenute in omaggio sono segnalati: l'Annuario dell' Istituto e Museo Zoologico dell' Università di Napoli (vol. VIII, 1956); un gruppo di pubblicazioni dell' Istituto per le applicazioni del calcolo, offerto dal consocio Picone; un altro gruppo di lavori geologici e paleontologici, offerto dal socio straniero Arambourg; due cenni commemorativi di Giuseppe De Lorenzo, presentati dal socio D' Erasmo.

Il socio Colamonico presenta ed offre in omaggio il volume XVI delle Memorie di Geografia economica, comprendente uno studio del prof. Leandro Pedrini sopra *I porti delle riviere liguri*, e ne discorre.

Il Presidente, a nome dell' Accademia, ringrazia tutti i donatori.

Si stabilisce il calendario delle tornate ordinarie dell' anno 1958, come segue: Gennaio 4; Febbraio 1°; Marzo 1°; Aprile 5; Maggio 3; Giugno 7; Novembre 15; Dicembre 6.

La Commissione Franchetta, Caccioppoli e Miranda riferisce sulla nota del dott. Mario Curzio *Sui gruppi φ-isomorfi ad un gruppo speciale finito*, proponendone l' accoglimento per la stampa nel Rendiconto. — L' Accademia unanime approva.

Il socio D' Erasmo presenta una nota del dott. Virgilio Catalano dal titolo *Note geologiche ercolanesi. Materiali piroclastici anteriori all' eruzione del 79 d. Cr. rinvenuti sotto l' area della Palestra di Ercolano.* — Il Presidente nomina la Commissione D' Erasmo, Scherillo, Imbò, con l' incarico di riferire su questo lavoro nella prossima tornata.

Lo stesso socio D' Erasmo presenta, per gli Atti, una memoria del prof. Antonio Lazzari sopra *Le prospettive petrolifere dell' Italia meridionale.* Viene incaricata di riferire su di essa la Commissione costituita dai soci D' Erasmo, Scherillo e Imbò.

Il socio corrispondente Franciosi presenta, per il Rendiconto, una nota del dott. Renato Sparacio, *Generalizzazioni del teorema di Castigliano.* – Il Presidente incarica di riferire su di essa la Commissione costituita dai soci Miranda, Nobile, Franciosi.

Il socio Spampinato presenta, per la inserzione nel Rendiconto, una sua nota dal titolo *La varietà di* S_{11} *determinata da una superficie algebrica come insieme dei suoi flessi.*

Constatata la validità dell' adunanza, a norma dell' art. 12 del nuovo Statuto per la votazione a cariche sociali, il presidente invita i soci ordinari a procedere, secondo l' ordine del giorno, alla elezione del vice-presidente per l' anno 1958.

Il segretario ricorda gli articoli dello Statuto e del Regolamento riguardanti tale votazione e distribuisce le schede agli aventi diritto.

La votazione, effettuata a scrutinio segreto, dà il risultato seguente:

Soci ordinari presenti e votanti, dodici:

Vittorio Nobile, voti undici,

Scheda bianca, una.

Il presidente proclama eletto vice presidente dell' Accademia per l' anno 1958 il socio Vittorio Nobile, avvertendo che a norma dell' art. 15 dello Statuto sociale la nomina sarà comunicata al Ministro della Pubblica Istruzione per la prescritta approvazione del Capo dello Stato.

Rilevato che col 31 dicembre 1957 scade il triennio di carica del Tesoriere Scherillo, si passa alla votazione, pure a scrutinio segreto, a detta carica per il prossimo triennio 1958-1960, col seguente risultato:

Soci ordinari presenti e votanti, dodici:

Antonio Scherillo, voti undici,

Scheda bianca, una.

Il presidente proclama eletto Tesoriere dell' Accademia per il triennio 1958-1960 il socio Antonio Scherillo, che ringrazia per la prova di fiducia accordatagli dai Colleghi.

Processo verbale dell' adunanza del dì 7 dicembre 1957.

Presiede il presidente Miranda, essendo presenti i soci ordinari residenti Bakunin, Catalano, Colamonico, D' Erasmo (segretario), Franchetta, Giordani, Imbò, Nobile, Pierantoni, Scherillo, Spampinato ed i corrispondenti Beretta, Colucci, Franciosi e Montalenti.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 16 novembre, che è approvato. Indi comunica la lettera 2 dicembre dell' Assessore Delegato all' Istruzione pubblica del Comune di Reggio nell' Emilia, che invita l' Accademia a partecipare — con la propria adesione, e, se possibile, anche con la propria collaborazione — al Congresso di Studi per le Celebrazioni Spallanzaniane, che avrà luogo in quella città nel prossimo anno 1958. — Si dice poi sicuro interprete dell' unanime sentimento dei colleghi esprimendo ai soci Pierantoni e Montalenti, presenti all' adunanza, i rallegramenti dell' Accademia per le alte onorificenze ad essi concesse recentemente in Napoli dal Presidente della repubblica federale tedesca Heuss.

Il socio Colamonico presenta ed offre in omaggio il volume XVIII delle Memorie di geografia economica, comprendente tre lavori dei dott. Bianchini, Pecora e Albertini rispettivamente sui *Porti minori della Campania, della Calabria e della Venezia.* — Il presidente ringrazia.

Il socio D' Erasmo, tanto in nome proprio che dei colleghi Imbò e Scherillo, dà lettura del rapporto sulla memoria del prof. Antonio Lazzari dal titolo *Le prospettive petrolifere dell' Italia meridionale.* La Commissione è unanime nel proporre che il lavoro venga accolto per la stampa nel volume in corso degli Atti, limitando, per ragioni di economia, il ricco materiale illustrativo che l' accompagna a sei tavole di fotografie a reticolo, una carta geologica a tratteggio, una carta di sezioni e poche figure schematiche da inserirsi nel testo. — La proposta è accolta all' unanimità dall' Accademia.

La Commissione D' Erasmo, Imbò, Scherillo riferisce sulla nota del dott. Virgilio Catalano, *Note geologiche ercolanesi. Materiali piroclastici anteriori all' eruzione del 79 d. Cr. rinvenuti sotto l' area della Palestra di Ercolano,* con la proposta di inserzione nel Rendiconto. — L' Accademia approva.

E' ugualmente approvata a voti unanimi la proposta della Commissione Franciosi, Nobile, Miranda, riguardante la nota del dott. Renato

Spàracio, *Generalizzazioni del teorema di Castigliano*, che è accettata per la stampa nel Rendiconto.

Il socio Scherillo presenta, per il Rendiconto, una nota del dott. Renato Sinno, *Studio geologico e petrografico della zona Via Scalandrone - Punta dell' Epitaffio* (*Lucrino*). Il presidente incarica la Commissione composta dai soci Scherillo, D' Erasmo e Imbò di riferire su questo lavoro nella prossima adunanza.

Il socio Spampinato presenta, per lo stesso periodico, una sua breve nota *Sui numeri bicomplessi di Corrado Segre.*

INDICE